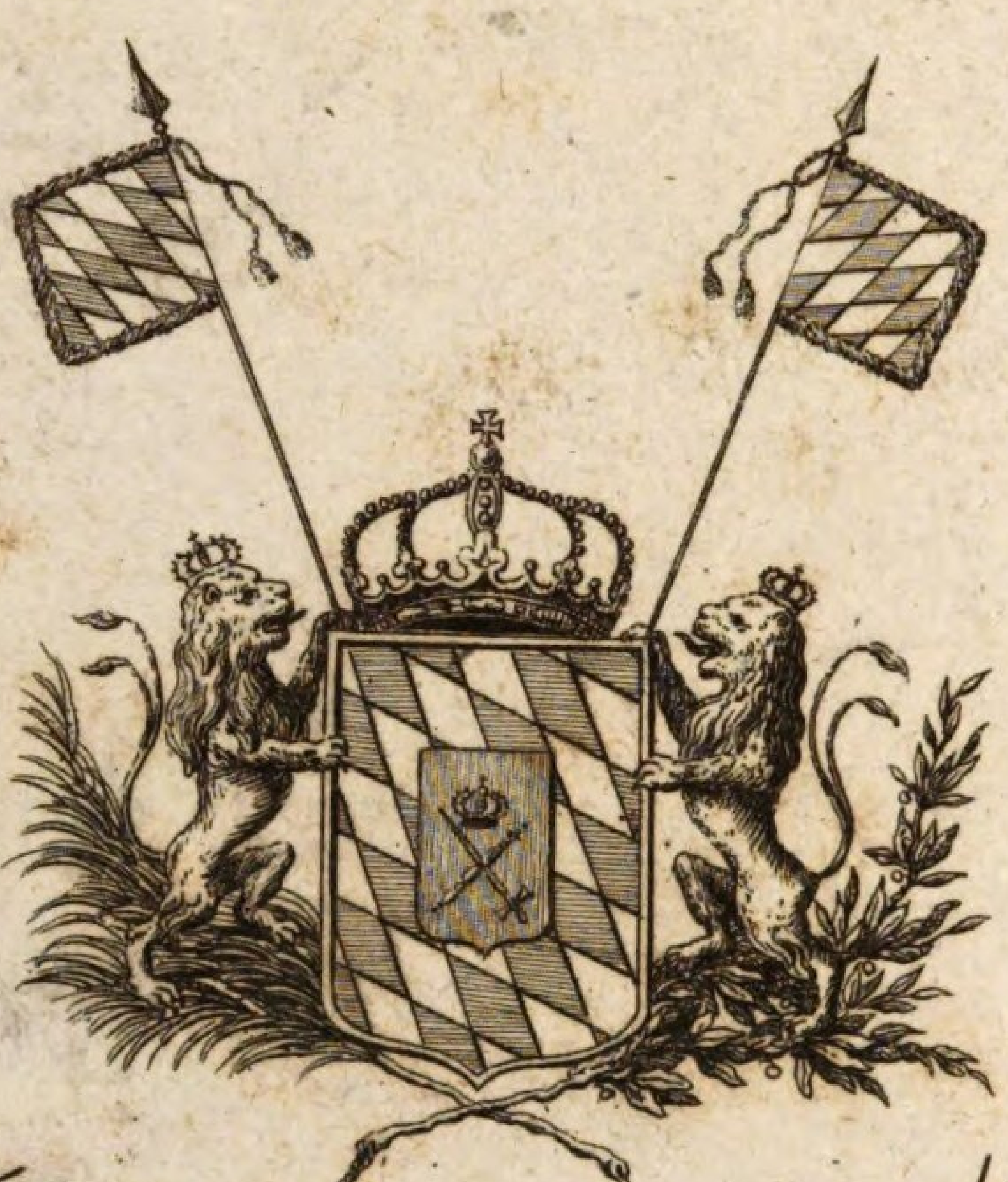
Math. P. 743 g (1

Geschenk des Herrn Oberstlieutenant
Graf v. Busek

~~a. i.~~

9 ~~9. 8~~



Bibliotek des König: baierschen
3ten Linien Infant: Regt
Prinz Carl.

Cla
1

Ab 1

A

Handbuch

086

der

Arithmetik und Geometrie

für

Offiziere

welche diese Wissenschaften von selbst erlernen wollen

von

einem Königl. Preuß. Artillerie-Offizier.

Bibliothek des 3ten L. I. R. Prinz Carl

Mit IX. Kupfertafeln.

Berlin
bei Arnold Wever. 1789.

Gd/68/1646

Bibliothec
Des II Fusilier Regiments

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Erster Theil.

Welcher

die

Arithmetik

enthält.

Vorbericht.

Der Nutzen der mathematischen Wissenschaften für den Militärstand ist fast allgemein anerkannt, aber sehr wenige Bücher sind davon, in Rücksicht auf ihn in unsrer Sprache geschrieben, und von diesen kaum eines, was nicht mündlicher Erläuterungen bedürfte. Diese Bemerkung, und noch mehr, die schon vor mehreren Jahren von verschiedenen Herrn Offiziers gethane Aeußerung: „Ob nicht von diesen Wissenschaften die für sie höchstnöthigen Wahrheiten, nebst deren Anwendung so in ein Ganzes zusammengefaßt werden könnten, nach welchem man sie ohne Jemandes Beihülfe zu erlernen im Stande wäre,“ erregte in mir den Wunsch: daß diesem Bedürfnisse abgeholfen werden möchte. Offenbar konnte dieses nur durch einen deutlichen, nicht zu gedrängten Vortrag der Arithmetik und

Geometrie, als der beiden ersten Theile der Mathematik, geschehen, weil von diesen Herrn, während ihres Subalternstandes, die militärische Beurtheilung irgend eines kleinen Postens, dessen Aufnahme à coup d'oeil, die Bestimmung der Größe einer Verschanzung &c. &c. verlangt wird. Eine Zeit lang harrete ich auf die Erscheinung eines Buches, das dieser Absicht entsprechen möchte; da aber meine Erwartung unerfüllet blieb, so unterzog ich mich selbst der dazu erforderlichen Arbeit, um dadurch einigen Freunden nützlich zu werden. Als sie vollendet war, wurde sie einigen durch ihre mathematischen Schriften rühmlich bekannten Gelehrten, wie auch solchen Offizieren, die diese Wissenschaften blos nach der Praxis kannten, zur nähern Prüfung vorgelegt. Diese fasseten den Gang der Wahrheiten durch bloßes Lesen; jene hielten das entstandene Werk ihres Beifalles werth, und forderten mich auf, es durch den Druck allgemein bekannt zu machen, weil es die mathematischen Wissenschaften bei diesem achtungswerthen Stande befördern, und dadurch zum allgemeinen Besten etwas beitragen würde. Dieser Beweggrund also, und kein anderer, konnte mich zur

Bekanntmachung des gegenwärtigen Werkes bestimmen, und ich werde mich für hinlänglich belohnt halten, wenn auch nur einige meines Standes die darinnen vorgetragenen Wahrheiten sich eigen machen, und durch deren Kenntniß aufgemuntert werden sollten, in die übrigen Theile der Mathematik, die in der That eben so wenige ausserordentliche Fähigkeiten als gegenwärtige erfordern, vorzudringen.

Nun schwiege ich gern, wenn es nicht Pflicht wäre, sich über die Anordnung der Wahrheiten, in sofern man von der gewöhnlichen abweichet, näher zu erklären, welches denn hier mit wenigen Worten geschehen mag.

In Ansehung der Arithmetik sind gleich Anfangs bey Erklärung der Eigenschaften der ganzen Zahlen, die zehntheiligen Zahlen, oder die sogenannten zehntheiligen Brüche mitgenommen worden. Dawider pflegt man meistens einzuwenden; daß ihre Behandlung einem Anfänger ungleich schwerer werde, als wenn ihm solche erst nach der Erklärung der Brüche bekannt gemacht werden. Wäre diese Ursache

ganz gegründet, so müßte ich diesen Anstoß gewiß im Unterrichte bei denenjenigen gefunden haben, welche nicht den mindesten Begriff von einer Zahl hatten. Weil ich ihn aber nie angetroffen habe, und diese Zahlen doch wirklich zum allgemeinen Gesetze der Zahlen gehören, so konnte ich wohl nicht umhin, meiner Ueberzeugung zu folgen.

Was die Entwickelung der Quadrat- und Kubikzahlen, nebst ihren Wurzeln betrift, so meinete ich, daß man hier bei den Zahlen billig das verstatten könnte, was man sich in der Buchstabenrechenkunst bei den Buchstaben erlaubt, wenn anders dabei keine irrige Vorstellungen entstehen können; nemlich, allgemeine Regeln aus blossen Analogien herzuleiten.

Vielleicht erwartete man nach den Progressionen die Lehre der Logarithmen so vorgetragen, wie sie in vielen Lehrbüchern angetroffen wird. Sie ist aber gänzlich weggelassen worden, nicht sowohl, weil die in der Geometrie vorkommenden Rechnungen ohne Logarithmen gemacht werden konnten, als vielmehr: weil die gewöhnliche Bestimmungsart derselben den Lernenden immer etwas im Dunkeln

läßt;

läßt; daher die Methode nach den Exponenzialgrößen (wie sie der Professor Bürja im selbstlernenden Algebraisten entwickelt hat) am vorzüglichsten bleibt, welche aber hier nicht wohl vorgetragen werden konnte. Die Progressionen durften dagegen nicht weggelassen werden, weil ein Anfänger wenigstens einige Begriffe davon haben muß, und weil auch aus der Summazion der Glieder der arithmetischen Progressionen die Regeln zur Berechnung der Kugelhaufen, als eine ihrer nützlichsten Anwendungen, abgeleitet werden konnten.

In Ansehung der Geometrie schien es mir nothwendig, meistens erst an denen Orten Erklärungen zu geben, wo sie unmittelbar angewandt werden; weil ich vielfältig erfahren habe, daß sie der Lernende daselbst aus dem Gedächtniß verlohren hatte, wenn sie sämtlich nach der Euklidischen Methode vorangeschickt waren.

Den Leser auf den Gebrauch der Sätze aufmerksam zu machen, habe ich meistens ihre Anwendungen unmittelbar folgen lassen; um aber

dem dabei bekannten Vorwurf: „daß dadurch der Zusammenhang der Wahrheiten zu sehr unterbrochen werde,“ auszuweichen, sind solche mit der Anfangssilbe des Worts **Anwendung** angezeiget, und in etwas eingerücket worden. Hieran also kann sie der Leser alsbald erkennen, und übergehen, wenn er dadurch gestöhret zu werden glaubt. Es würden indessen noch mehrere Beispiele gegeben worden seyn, wenn ich nicht die Meinung hegen müßte, daß derjenige, der die vorgetragenen Wahrheiten wohl gefaßt hat, von selbst dergleichen entdecken würde. So findet er schon ein weites Feld vor sich, wenn er die Wahrheiten von den Parallelen, vom Verhältnisse des Durchmessers zum Umkreise, der Sehnen zu ihren Bogen, und von den Diagonalen zu den Seiten der Vielecke, auf die Taktik oder Stellungskunst anwenden will.

Ob es wohlgethan sey, daß dem Riem- und Schachtmaße, von denen meines Wissens die Gesetze, wornach sie behandelt werden müssen, zu wenig bekannt sind, eine Stelle hier eingeräumt worden ist, überlasse ich jedem in der Hinsicht

sicht zu beurtheilen, daß sie bei sämtlichen Bauten angewandt werden.

Endlich ist jedem Theile sein tabellarischer Inhalt beigefügt, der anfangs dazu dienen kann, daß der Leser sich darnach prüfe: ob er die vorgetragenen Wahrheiten richtig gefaßt habe. Um hierbei sicher zu gehen, wird er wohl thun, jede Abtheilung erst mit einiger Aufmerksamkeit durchzulesen, um die Uebersicht des Ganzen zu gewinnen, und im tabellarischen Inhalte das, was ihm dunkel vorkömmt, anzuzeichnen; hierauf aber wird er die bezeichneten Stellen wiederum nach dem Texte so oft in Betrachtung nehmen, bis sie ihm sämtlich klar geworden sind. Hat er nun dieses erreichet, so kann er dann im erforderlichen Falle den tabellarischen Inhalt als Leitfaden, mit Hülfe der Figuren zu einem mündlichen Vortrage dieser Wissenschaften gebrauchen.

Uebrigens zeige ich noch an, daß *Bezout* Cours de mathematiques à l'usage du Corps royal de l'Artillerie, **Segners** Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie, **Karstens** Lehr-

Lehrbegriff der gesamten Mathematik, **Leonh. Euler** Anleitung zur Algebra, **Abel Bürja** selbstlernender Algebraist, wie auch dessen selbstlernender Geometer, **Schulzens** Sammlung trigonometrischer Tafeln, nebst noch einigen andern, die vornehmsten Quellen gewesen sind, aus welchen ich dann und wann geschöpft habe.

Berlin,
im Dezember 1788.

Der Verfasser.

Tabellarischer Inhalt.

Von einigen allgemeinen Grundwahrheiten, und von der Entstehung und den Eigenschaften der Zahlen und ihren Gesetzen.

Was die Arithmetik für eine Wissenschaft ist. ⸗ §. 1
Was man a. unter einer Größe an und für sich, b. unter gleichen Größen, und c. unter ungleichen Größen verstehet? und daß die kleinere ein Theil der größern genannt wird. . . . . ⸗ 2
Was die Einheit, und was eine ganze Zahl ist. . . ⸗ 3

Von den ganzen Zahlen.

Wie die ganzen Zahlen aus der Einheit entstehen. . ⸗ 4
Das bei denselben obwaltende Gesetz wird ihr allgemeines Gesetz genannt, nach welchem zehn Einheiten einer Art eine Einheit der nächst höhern Art bestimmen. . ⸗ 5
Von den Zahlen, welche Einheiten verschiedener Art enthalten, und die zwischen zehn und zwanzig, zwanzig und dreißig ꝛc. und zwischen einhundert und zweihundert ꝛc. ꝛc. fallen. . . . . ⸗ 6
Was zählen heißt. . . . . ⸗ 7
Wie die Zahlen durch Ziffern vorgestellet werden; was diese sind, und wie solche in bedeutende und unbedeutende eingetheilt werden. . . . . . . ⸗ 8
Wie die durch Ziffern vorgestellten Zahlen blos nach denen Stellen beurtheilt werden, welche die bedeutenden Ziffern einnehmen; und was numeriren heißt. . . ⸗ 9
Regel, nach welcher die ganzen Zahlen numerirt werden. ⸗ 10
Eine jede ganze Zahl, welche Einheiten verschiedner Art enthält, wird als eine Größe genommen, die aus soviel Theilen bestehet, als sie bedeutende Ziffern hat. . ⸗ 11
Eine Zahl um 10mal, 100mal ꝛc. größer oder kleiner zu machen.
Werden einer Zahl eine Menge Nullen zur Linken angesetzt, so wird dadurch ihr Werth nicht verändert. ⸗ 12

Von den zehntheiligen Zahlen.

Was für Größen die zehntheiligen Zahlen sind. . §. 13
Wie diese Zahlen durch die Ziffern vorgestellt werden können. . . . . ; 14
Regeln zum Numeriren dieser Zahlen, nach welchen sie auf zweierlei Art mit Worten ausgedrückt werden können.
Es mag diesen Zahlen jede beliebige Menge Nullen vor oder nachgesetzt werden, so wird dadurch der Werth der Zahlen in nichts verändert. . . . . . . ; 15
Wie diese Zahlen um 10mal, 100mal ꝛc. größer oder kleiner gemacht werden, sie mögen mit ganzen Zahlen verbunden seyn oder nicht. . . . . . . ; 16
Welche Zahlen abstrakte oder unbenannte Zahlen genannt werden. . . . . ; 17

Von den benannten Zahlen.

Was für Zahlen unter konkreten oder benannten Zahlen verstanden werden. . . . . ; 18
Von ihren Gesetzen. . . . . ; 19
Von den Zeichen der Gleichheit und der Ungleichheit, und wie sie bei Größen zu gebrauchen sind. . . . ; 20
Was ein Grundsatz ist.
a. Eine Größe ist sich selbst gleich.
b. Eine Größe ist allen ihren Theilen zusammengenommen gleich.
c. Eine Größe ist größer als einer ihrer Theile; oder auch als einige ihrer Theile zusammengenommen.
d. Ein oder einige Theile zusammengenommen sind kleiner als ihr Ganzes.
e. Sind zwei Größen einer dritten gleich; so sind sie unter sich gleich. . . . . . . ; 21

Von den vier Rechnungsarten mit ganzen, zehntheiligen und benannten Zahlen.

Was unter den vier Rechnungsarten, als der Addizion, Subtrakzion, Multiplikazion und Division verstanden wird, und wie diese mit Zeichen bezeichnet werden. ; 23

Von der Addizion.

Was addiren heißt?
Welche Zahlen unter der Summe, und unter den Summirenden zu verstehen sind. . . . . . . ; 23
Unter welchen drei Fällen die Zahlen bei dieser Rechnungsart zu betrachten sind.

Regel zur Auflösung der Aufgaben beim ersten Falle §. 24
" " " " " " zweiten Falle " 25
" " " " " " dritten Falle " 26
Regel zur Erleichterung der Rechnung, wenn viele Zahlen gegeben werden. . . . . " 27
Die Summe von benannten Zahlen zu finden. . . " 28

Von der Subtrakzion.

Was subtrahiren heißt, und welche von den gegebenen Zahlen der Diminuend und der Diminutor ist; wie auch, daß die gefundene Zahl der Rest oder die Differenz genannt wird. . . . . " 29
Auch hier werden obige drei verschiedene Fälle bei den Zahlen angenommen.
Regel zur Auflösung der Aufgaben des ersten Falles . " 30
" " " " " " zweiten Falles " 31
" " " " " " dritten Falles " 32
Wie benannte Zahlen von einander abgezogen werden. " 33
Von zweien Zahlen ist die größere ihrer halben Summe und halben Differenz zusammengenommen gleich; und die kleinere ihrer halben Summe weniger ihrer halben Differenz . . . . " 34
f. Werden gleichen Größen gleiche Größen zugesetzt, oder weggenommen, so entstehen gleiche Größen.
g. Werden gleichen Größen ungleiche Größen zugesetzt oder weggenommen, und so umgekehrt; so entstehen ungleiche Größen. . . . . . " 35
Was unter einer Rechnungsprobe verstanden wird.
a. Regel zur Probe der Addizions-Exempel.
b. " " " " Subtrakzions-Exempel. . " 36

Von der Multiplikazion.

Was multipliziren heißt. Von den gegebenen Zahlen wird die eine der Multiplikand, die andere der Multiplikator (oder beide die Faktores) und die zu bestimmende das Produkt oder Faktum genannt. . " 37
Nur diejenige Zahl ist ein Produkt, die aus dem Multiplikand eben so, wie der Multiplikator aus der Einheit entstehet, und wie daßelbe von zweien gegebenen Zahlen gefunden werden kann . . . " 38
Es ist willkührlich, welcher Faktor als Multiplikator, oder als Multiplikand genommen wird. . . " 39
Wie die pythagorische Tabelle angeordnet wird. . " 40
Die hier gegebenen Zahlen werden unter drei Fällen genommen.

Regel zur Auflösung der Aufgaben des ersten Falles, sowohl für ganze als zehntheilige Zahlen.
Die Produkte von Zehnern und Zehntheilen, von Hunderten und Hunderttheilen ꝛc. bestimmen eine Zahl der Einer. . . . . §. 41
Auflösung der Aufgaben des zweiten Falles.
Hier kann jedes Produkt auf dreierley Art vorgestellt werden.
Jedes Produkt besteht aus der Summe der einzelnen Produkte, welche aus den Theilen des Multiplikanden in dem Multiplikator entstehen.
Wenn zwei oder auch mehrere Zahlen mit einer dritten multiplizirt, und die entstehenden Produkte summirt werden sollen, so darf man nur erstere summiren, und diese entstehende Summe mit dem gemeinschaftlichen Faktor multipliziren. 42
Auflösnng der Aufgaben des dritten Falles.
Das Produkt solcher Zahlen ist aus den einzelnen Produkten ihrer Theile zusammengesetzt. . . . 43
a Endiget eine Zahl mit 2, 4, 6, 8, oder 0 so ist in ihr die 2 genau enthalten.
b Enthält die Summe der Ziffern einer Zahl entweder 3 oder 6 oder 9 ein oder mehrere mal, so enthält die Zahl selbst eine von diesen genau.
c Endiget eine Zahl mit 5 oder 0, so enthält sie 5 genau.
d Geben von einer Zahl die Ziffern der geraden Stellen von den Ziffern der ungeraden Stellen abgezogen, zur Differenz die 0, oder die 11 ein oder mehreremal, so ist in der Zahl selbst die 11 genau enthalten. 44
Was einfache oder Primzahlen, und was zusammengesetzte Zahlen; desgleichen, was gerade oder ungerade Zahlen sind. 45
Jedes Produkt wird genau um so vielmal größer oder kleiner, als, bey einem unveränderlichen Faktor, der andere größer oder kleiner gemacht wird; hingegen verändert sich der Werth eines Produkts nicht, wenn man den Werth des einen Faktors um so vielmal größer, als den des andern kleiner macht. 46
Drei Zahlen nach beliebiger Ordnung mit einander multiplizirt, geben immer einerley Produkt. Was zweifache oder dreyfache Produkte sind, und wie sie auf dreierlei Art entstehen können. 47
Jede beliebige Menge Zahlen nach beliebiger Ordnung mit einander multiplizirt, giebt gleiche Zahlen. . 48

Die

Die Aufgaben für benannte Zahlen werden unter zwei Fälle genommen; als
a Eine Größe auf kleinere von gleichem Werthe zu bringen.
b Eine Größe zu finden, die eine vorgegebene bestimmtemal enthält. . . . §. 49
Regeln zur Abkürzung der Multiplikazion.
a Wenn ein Faktor mit 1 anfängt oder endiget.
b Wenn ein Faktor nahe an 100, 1000 ꝛc. grenzt.
c Wenn ein Faktor ein Produkt zweier Zahlen ist.
d Wenn und wie die Nepperschen Rechenstäbchen zu gebrauchen.
e Wenn die Produkten-Täfelchen anzuordnen, und wie sie zu gebrauchen sind.
f Wenn ein Produkt nur bis zu einer gewissen zehntheiligen Stelle bestimmt werden soll. . . . 50

Von der Division.

Was dividiren heißt.
Was für Zahlen unter dem Divisor, dem Dividenden und dem Quozienten verstanden werden.
Der Dividend enthält den Quozienten so oft, als der Divisor die Einheit; oder der Quozient entstehet aus dem Dividenden genau so, als die Einheit aus dem Divisor. 51
Der Dividend kann als Produkt, der Quozient als Multiplikand und der Divisor als Multiplikator betrachtet werden.
Die Fragen, so hier gethan werden, sind:
a Der wievielste Theil ist eine gegebene Zahl von einer andern?
b Wie groß ist der Theil der einen gegebenen Zahl, den die andere anzeigt? 52
Es werden hier die Zahlen nach den dreien, bey der Multiplikazion angenommenen Fällen genommen.
Auflösung der Aufgaben des ersten Falles.
Allgemeine Regel für die Zahlen dieser Rechnungsart . 53
Auflösung der Aufgaben des zweiten Falles. . . . 54
Auflösuug der Aufgaben des dritten Falles.
Was man beobachten muß, wenn während der Rechnung ein Theil des Quotienten zu groß oder zu klein genommen worden ist. 55
Sind der Dividend und der Divisor keine gleiche Primzahlen oder Produkte derselben, so wird der Quozient durch Näherung bestimmt. Wie solches geschiehet. . 56

Aus einem gegebenen zweifachen, dreifachen ꝛc. Produkte und einem seiner Faktoren den andern zu bestimmen. §. 57
Benannte Zahlen zu dividiren, hat man drei Fälle zu unterscheiden:
a Eine gegebene Zahl in eine andere höherer Art von gleichem Werthe zu verwandeln.
b Einen gewissen Theil solcher Zahl zu finden.
c Zu bestimmen, der wievielste Theil die eine von der andern sey. . . . . . . ⸗ 58
h Gleiche Größen mit gleichen Größen multiplizirt oder dividirt, geben gleiche Größen.
i Hingegen gleiche Größen mit ungleichen Größen multiplizirt oder dividirt, und so umgekehrt, geben ungleiche Größen. . . . . ⸗ 59
Regeln zu den Rechnungsproben für vorige beide Rechnungsarten. . . . . . . ⸗ 60
Regeln zur Abkürzung der Division.
a Wenn der Divisor ein Produkt zweier Zahlen ist.
b Wie die einzelnen Produkte während der Rechnung vom Dividenden abgezogen werden können.
c Wenn vom Divisor ein Produkten⸗Täfelchen anzuordnen ist, und wie es gebrauchet werden muß.
d Wie zu verfahren ist, wenn der Quozient nur bis zu einer bestimmten zehntheiligen Stelle gefunden werden soll. . . . . . . ⸗ 61

Von den Eigenschaften der Brüche und deren vier Rechnungsarten.

Von den Eigenschaften der Brüche.

Was Brüche für Größen sind, und wie wir ihre Entstehung annehmen können. . . . ⸗ 62
Wie die Brüche durch zwei Ziffern vorgestellt werden; und warum von ihnen die eine der Zähler und die andere der Nenner genannt wird.
Auch heißen die Nenner und Zähler eines Bruches dessen Glieder. . . . . . ⸗ 63
Die Brüche werden eingetheilt a in ächte, die einen kleinern Werth als die Einheit haben, unter welche die zehntheiligen Brüche mit gehören; b in unächte, welche einen größern Werth, als die Einheit haben; auch giebt es noch gebrochene Brüche. . . ⸗ 64
Die Einheit, wie auch jede andere ganze Zahl, hat oft die Gestalt eines Bruches: und wie aus diesem jene Größen gefunden werden.
Wie der Einheit oder jeder ganzen Zahl die Gestalt eines Bruches nach jedem beliebigen Nenner gegeben werden kann. . . . . . . ⸗ 65

Wie

Wie von einem unächten Bruche die in ihr enthaltene Einheit oder auch ganze Zahl zu entdecken, und wie eine ganze mit einem Bruche verbundene Znhl in einen Bruch zu verwandeln ist. . . . §.66
Bei einem jeden Bruche kann der Zähler den Dividend, der Nenner den Divisor, und der Bruch selbst den Quozienten vorstellen.
Wie dieser Vorstellung gemäß aus zweien Zahlen der Quozient aufs genaueste bestimmt werden kann. . = 67
Von Brüchen, welche gleiche Zähler und ungleiche Nenner haben, ist der kleinste der, der den größten Nenner hat.
Regel, einen Bruch bestimmtemal kleiner zu machen. = 68
Regel, einen Bruch bestimmtemal größer zu machen. = 69
Von Brüchen, welche gleiche Nenner und ungleiche Zähler haben, ist der kleinste derjenige, der den kleinsten Zähler hat.
Regel, einen Bruch bestimmtemal kleiner zu machen. = 70
Regel, einen Bruch bestimmtemal größer zu machen. = 71
Ein Bruch bleibt seinem Werthe nach unverändert, wenn dessen Glieder mit gleichen Zahlen multiplizirt oder dividirt werden. . . . . = 72
Wie ein Bruch ohne Nachtheil seines Werthes in einen andern von jeder beliebigen Benennung verwandelt wird. 73
Brüche auf gleiche Benennung zu bringen. . . = 74
Regel zur Abkürzung der vorigen Bestimmung. . = 75
Einen Bruch ohne Nachtheil seines Werthes auf die kleinste Benennung zu bringen. . . . . . . = 76
Den größten gemeinschaftlichen Divisor zweier Zahlen zu finden. . . . . . = 77
Brüche, deren Glieder einfache Zahlen verschiedner Art, oder Produkte derselben enthalten, können auf keine kleinere Benennung gebracht werden. . . . . = 78

Von den vier Rechnungsarten in Brüchen.

Von der Addizion der Brüche.

Brüche zu addiren. . . . . = 79
Ganze Zahlen und Brüche zu addiren. . . . = 80

Von der Subtrakzion der Brüche.

Brüche von einander abzuziehn . . . . . = 81
Brüche von ganzen Zahlen abzuziehn. . . . = 82

Von der Multiplikazion der Brüche.

Brüche mit einander zu multipliziren. . . . = 83
Brüche mit ganzen Zahlen zu multipliziren.

Wie die Multiplikazion bei ganzen Zahlen noch eine Abkürzung erlaubt, wenn man eine der gegebenen Zahlen in einen bequemen Bruch verwandeln kann.
Ganze mit Brüchen verbundene Zahlen mit einander zu multipliziren. . . . . §. 84

Von der Division der Brüche.

Brüche in einander zu dividiren. . . . . . . = 85
Ganze Zahlen mit Brüchen, und Brüche mit ganzen Zahlen zu dividiren.
Auch die Division ganzer Zahlen erlaubt eine Abkürzung, wenn man eine der gegebenen in einen bequemen Bruch verwandeln kann.
Ganze mit Brüchen verbundene Zahlen in einander zu dividiren. . . . . . = 86
Einen Bruch in einen gebrochenen Bruch, und diesen in jenen zu verwandeln.
Jeder gebrochene Bruch giebt zu erkennen, daß eine ganze Zahl durch einen Bruch, und so umgekehrt; oder auch ein Bruch durch einen andern getheilt werden soll. = 87

Von den Quadrat- und Kubikzahlen nebst ihren Wurzeln.

Von den Quadratzahlen.

Was für eine Größe man unter einer Quadratzahl, und unter einer Quadratwurzel verstehet. . . = 88
Wie die Quadratzahl einer Größe angezeiget wird, und was der Exponent dieser Größe heißt. . . = 89
Die gegebenen Zahlen, von welchen Quadratzahlen formirt werden sollen, sind unter zwei Fällen zu nehmen; sie haben entweder a. eine, oder b. mehrere bedeutende Ziffern.
Regel zur Formirung der Quadratzahlen, von Zahlen, die eine bedeutende Ziffer haben. . . . = 90
Regel zur Formirung der Quadratzahlen, von Zahlen, die mehrere bedeutende Ziffern haben. . . = 91
Wie eine Tabelle für alle mögliche Quadratzahlen angeordnet werden kann. . . . . . . = 92
Wie diese Tabelle bei Formirung großer Quadratzahlen vortheilhaft zu gebrauchen ist. . . . . = 93

Von den Quadratwurzeln.

Wie die Quadratwurzel einer Größe angezeiget wird. = 94

Die

Die gegebenen Zahlen werden wieder unter zwei Fällen genommen; als, sie haben entweder a. zwei, oder b. mehrere bedeutende Ziffern mit einer geraden Anzahl Nullen oder soviel zehntheiligen Stellen.
Regel zur Auflösung der Aufgaben beim ersten Falle. §. 95
= = = = = = zweiten Falle.
Was man zu beobachten hat, wenn ein Theil der Wurzel zu groß angenommen worden ist; oder auch, wenn ein Divisor in einer zu theilenden Zahl keinmal enthalten ist. . . . . . = 96
Was unaussprechliche oder Irrazionalzahlen sind. . = 97
Wie der Werth einer Irrazionalzahl durch Näherung bestimmt wird. . . . . = 98
Regeln zur Abkürzung der Rechnung, als
a. Wie die Zahlen von Klasse zu Klasse während der Rechnung herunter gesetzet, und wie von ihnen mit den zweifachen Produkten die Quadratzahlen zugleich abgezogen werden.
b. Wie während der Rechnung die Quadratzahlen und zweifachen Produkte unmittelbar abgezogen werden.
c. Wie dabei die Tabelle der Quadratzahlen vortheilhaft zu gebrauchen ist. . . = 99

Von den Kubikzahlen.

Was für Größen die Kubikzahlen und die Kubikwurzeln sind.
Wie die Kubikzahl einer Größe angezeiget wird, und was man ihren Exponenten nennet. . . = 100
Die gegebenen Zahlen, von welchen Kubikzahlen formirt werden sollen, haben wieder a. entweder eine, oder b. mehrere bedeutende Ziffern.
Regel zur Bestimmung der Kubikzahlen von Zahlen, welche eine bedeutende Ziffer haben. . . . = 101
Regel zur Formirung der Kubikzahlen von Zahlen, welche mehrere bedeutende Ziffern haben. . . = 102
Wie eine Tabelle für alle mögliche Kubikzahlen angeordnet werden kann. . . . = 103
Wie diese Tabelle zu gebrauchen ist. . . = 104

Von den Kubikwurzeln.

Wie die Kubikwurzeln angedeutet werden. . = 105
Die gegebenen Kubikzahlen können entweder a. höchstens drei, oder b. mehrere bedeutende Ziffern haben.
Regel zur Auflösung der Aufgaben des ersten Falles. = 106

Regel zur Auflösung der Aufgaben des zweiten Falles.
Was man beobachten muß, wenn ein Theil der Wurzel zu groß angenommen worden, oder wenn ein Divisor in einer zu theilenden Zahl keinmal enthalten ist. . §.107
Von denen hier entstehenden Irrazionalzahlen. . = 108
Wie deren Werth durch Näherung zu finden. . . = 109
Zur Abkürzung der Rechnung finden hier die §. 99. angezeigten Regeln statt. . . . = 110

Von den arithmetischen und geometrischen Verhältnissen, wie auch von deren Proporzionen oder Verhältnißgleichungen.

Was man unter einem arithmetischen, und unter einem geometrischen Verhältnisse verstehet.
Zu jedem Verhältnisse können nur Größen einerlei Art, oder die zu einem Gesetze gehören, genommen werden. = 111

Von den arithmetischen Verhältnissen und Proporzionen.

Was ein arithmetisches Verhältniß bestimmt; und was die Glieder und Differenz desselben genannt wird.
Was verschiedene Verhältnisse, gleiche Verhältnisse, und was Verhältnisse der Gleichheit sind.
Wie die Verhältnisse bezeichnet werden. . = 112
a. Ein arithmetisches Verhältniß bleibt unverändert, wenn seinen Gliedern gleiche Größen zugesetzt oder abgenommen werden.
b. Die Glieder eines arithmetischen Verhältnisses, mit gleicher Zahl multiplizirt oder dividirt, geben ein anderes, dessen Differenz genau sovielmal größer oder kleiner ist, als die Differenz des gegebenen, und als die multiplizirende oder dividirende Zahl Einheiten enthält.
Wenn zwei Verhältnisse einer dritten gleich sind, so sind sie unter sich gleich. . . . = 113
Was unter einer arithmetischen Proporzion verstanden wird. . . . . = 114
Was eine abgesonderte, eine stetige, eine verkehrte Proporzion, und was eine Proporzion der Gleichheit ist. = 115
Jede Proporzion hat vier Glieder, die nach ihrer Folge benennet werden. Welche von diesen Gliedern die gleichnamigen, die äußern und die mittlern heißen.

Werden bei einer stetigen Proporzion die Glieder nach ihrer Verschiedenheit genommen, so hat sie deren nur drei. . . . . . §. 116
Von jeder abgesonderten Proporzion ist die Summe der äussern Glieder der Summe der mittlern gleich; bei einer stetigen ist sie aber doppelt so groß, als das mittlere, und das mittlere ihrer halben Summe gleich. Zwischen zweien gegebenen Zahlen ist die mittlere eine arithmetische Proporzionalzahl, und deren halben Summe gleich. 117
Die Summe aller Glieder einer abgesonderten Proporzion ist zweimal so groß, als die Summe der äußern Glieder; hingegen bei einer stetigen ist sie dem entstehenden Produkte gleich, wenn man die Summe der äußern Glieder mit $\frac{3}{2}$ multiplizirt.
Den mittlern Werth von mehr als drei gegebenen Grössen zu finden. 118
Jedes fehlende Glied einer arithmetischen Proporzion zu finden. 119

Von den geometrischen Verhältnissen und Proporzionen.

Was ein geometrisches Verhältniß bestimmt.
Was die Glieder und der Exponent eines geometrischen Verhältnisses sind.
Was man hier unter gleichen und verschiedenen Verhältnissen, wie auch unter Verhältnissen der Gleichheit verstehet; und wie diese Verhältnisse bezeichnet werden. 120
Diese Verhältnisse können unter, oder in Gestalt solcher Brüche vorgestellt werden, deren Zähler die ersten Glieder, die Nenner ihre zweiten Glieder, und sie selbst deren Exponenten geben.
Ein Verhältniß wird nicht verändert, wenn dessen Glieder mit gleichen Zahlen multiplizirt oder dividirt werden. 121
Ein in Brüchen gegebenes Verhältniß in ein Verhältniß ganzer Zahlen zu verwandeln.
Brüche von gleichen Nennern verhalten sich gegen einander, wie ihre Zähler; hingegen die von gleichen Zählern, wie ihre Nenner verkehrtgenommen. . . 122
Von gleichen Verhältnissen bestimmen die Summen der ersten und der zweiten Glieder ein Verhältniß, was jedem der gegebenen Verhältnisse gleich ist. . . 123
Was zusammengesetzte, und was zusammensetzende Verhältnisse sind.
Wie man ein Verhältniß einfacher vorstellen kann. 124

Was

Was überhaupt unter einer geometrischen Proporzion verstanden wird. Und was abgesonderte, stetige und verkehrte Proporzionen, wie auch Proporzionen der Gleichheit sind. . . . . . §.125

Von einer geometrischen Proporzion ist das Produkt der äußern Glieder dem Produkte der mittlern gleich.

Das mittlere Glied einer stetigen Proporzion ist die Quadratwurzel vom Produkte der beiden andern Glieder.

Die mittlere geometrische Proporzionalzahl zweier Zahlen zu finden. . . . . . = 126

Die Faktores zweier gleichen Produkte geben denn eine Proportion, wenn die Faktores des einen als äußere Glieder, und die Faktores des andern als mittlere Glieder gesetzt werden.

a. Werden in einer Proporzion die mittlern Glieder verwechselt, oder

b. Die Verhältnisse umgekehrt; so entstehen dadurch neue Proporzionen. . . . . . = 127

Jedes fehlende Glied einer Proporzion zu finden.

Jedes Produkt ist die vierte Proporzional-Größe einer Proporzion, deren erstes die Einheit ist; hingegen ist ein solches der Quozient bei einer Proporzion, deren zweites Glied die Einheit ist. . . . . = 128

In jeder Proporzion verhält sich die Summe oder Differenz des ersten und zweiten Gliedes zum ersten oder zweiten, wie die Summe oder Differenz des dritten und vierten Gliedes zum dritten oder vierten Gliede.

Die Summen der Glieder verhalten sich genau so gegeneinander, wie ihre Differenzen. . . = 129

Aus einer Proporzion entstehet immer eine andere, wenn ihre gleichnamigen Glieder mit gleichen Zahlen multiplizirt oder dividirt werden. . . . = 130

Die aus den Verhältnissen jeder beliebigen Menge Proporzionen zusammengesetzten Verhältnisse, bestimmen eine neue Proporzion.

Die Quadratzahlen, Kubikzahlen, wie überhaupt die höhern Potenzen gleicher Art, müssen unter sich in Proporzion stehen, wenn ihre Wurzeln eine Proporzion geben.

Und umgekehrt: die Quadratwurzeln, Kubikwurzeln, wie überhaupt die vierte, fünfte Wurzeln ꝛc. geben unter

sich eine Proporzion, wenn ihre Quadratzahlen ꝛc. in Proporzion stehen.

Zu einer gegebenen Größe eine andere zu finden, die mit ihr ein zusammengesetztes Verhältniß vorgegebener Verhältnisse bestimmt. . . . . . §. 131

Eine Zahl verhältnißmäßig gegen eine andere zu theilen. = 132

Von denen aus den Eigenschaften der Proporzionen abgeleiteten Rechnungsregeln.

Was unter der geraden oder verkehrten Regeldetri; der geraden zusammengesetzten und der verkehrten zusammengesetzten Regeldetri; der Gesellschafts-Rechnung ꝛc. verstanden wird. . . . . . §. 133

Von der einfachen geraden Regeldetri, nebst der Auflösung der zu ihr gehörigen Aufgaben.

Man muß sich unter den Gliedern des ersten Verhältnisses stets unbenannte Zahlen vorstellen. . . = 134

Von der einfachen verkehrten Regeldetri, nebst Auflösung der Aufgaben. . . . . = 135

Von der geraden zusammengesetzten Regeldetri, nebst Auflösung der Aufgaben.

Unter welchen Umständen sie besonders die Regel der Intreßrechnung, wie auch die Kettenregel genannt wird. = 136

Von der verkehrten zusammengesetzten Regeldetri, nebst Auflösung der Aufgaben. . . = 137

Von der Gesellschaftsrechnung, nebst Auflösung der Aufgaben.

Wenn ihre Regel die Vermischungs-Regel, und wenn sie die zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung genannt wird. = 138

Von den arithmetischen und geometrischen Progressionen, nebst ihren Anwendungen.

Was überhaupt unter einer Progression, und insbesondere unter einer zunehmenden oder abnehmenden arithmetischen oder geometrischen Progression verstanden wird. . . . . . = 139

Von den arithmetischen Progressionen.

Die Differenz zweier auf einander folgenden Glieder einer arithmetischen Progression ist ein und eben dieselbe,

und die Bestimmung einer Progression beruhet auf ihr erstes Glied und ihre Differenz. . . . . §. 140

Bey einer Progression kommen ihr erstes und letztes Glied, ihre Differenz und die Anzahl der Glieder in Betrachtung.

Ein jedes Glied einer Progression enthält ihr erstes und die Differenz so vielmal, als dem genommenen Gliede vorhergehen.

Das letzte Glied einer zunehmenden Progression zu finden, nimmt man die Differenz so vielmal, als Glieder weniger 1 vorhanden sind, und addirt zum entstehenden Produkte das erste Glied. . . . = 141

Ein jedes Glied einer Progression bestehet aus dem Unterschiede zwischen ihrem letzten Gliede und dem Produkte von der Differenz, und der Zahl, welche die Menge seiner folgenden Glieder anzeigt.

Das erste Glied einer Progression zu finden, multiplizirt man die Differenz mit der Zahl, welche die Menge ihrer Glieder weniger 1 anzeigt, und ziehet vom entstehenden Produkte das letzte Glied ab. . . = 142

Die Differenz einer Progression zu finden, theilet man die Differenz des ersten und letzten Gliedes mit der Zahl, welche die Menge ihrer Glieder weniger 1 angiebt.

Zwischen zweien gegebenen Zahlen jede beliebige Anzahl arithmetisch mittlerer Proporzionalzahlen zu finden. = 143

Die Anzahl der Glieder einer Progression zu finden, theilet man den Unterschied ihres ersten und letzten Gliedes durch die Differenz der Glieder, und addirt noch 1 zum entstehenden Quozienten. 144

Die Summe der Glieder einer arithmetischen Progression ist dem halben Produkte gleich, welches entstehet, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl ihrer Glieder multiplizirt. . = 145

Was für Zahlen die vieleckigten oder Polygonalzahlen sind, und wie dieselben gefunden werden.

Die Menge Kugeln einer drei= oder viereckigten Schicht zu finden, addirt mnn zu der Zahl, welche die Menge Kugeln von einer ihrer Seiten anzeigt, die Differenz ihrer Kugelreihen so vielmal, als das halbe Produkt eben dieser Zahl in eine andere, welche 1 weniger enthält, bestimmt. . . . . = 146

Was

Was für Zahlen die Pyramidalzahlen sind, und wie solche bestimmet werden.

Allgemeine Regel um die Menge eines drei oder viereckigten Haufens zu finden.

Die Menge Kugeln eines dreieckigten Kugelhaufens zu finden, nehme man die Anzahl einer Seite mit zwei andern um 1 steigenden Zahlen als Faktores, mache von ihnen ein Produkt, und nehme davon den sechsten Theil.

Die Menge Kugeln eines viereckigten zu finden, nehme man die von einer Seite doppelt, mache von der entstehenden Summe und zweien andern Zahlen, welche um 1 steigen, ein Produkt und nehme davon den 12ten Theil.

Die Menge Kugeln eines länglichten Kugelhaufens zu bestimmen, mache man ein Produkt dreier Faktoren, von welchen der erste die Anzahl Kugeln seiner Breite, der zweite eine mehr, und der dritte diejenige Summe angiebt, welche durch die Menge Kugeln des Rückens, und durch die von seiner Länge, aber doppelt genommen, bestimmt wird; und nehme davon den 12ten Theil. . . . . . §.147

Von den geometrischen Progressionen.

Die Bestimmung der Progression beruhet auf ihrem ersten Gliede und ihrem Exponenten, mit dessen Potenzen jenes entweder multiplizirt oder dividirt wird. . ⸗ 148

Jedes Glied einer zunehmenden geometrischen Progression ist einem Produkte gleich, was aus dem ersten Gliede und der sovielten Potenz des Exponenten gemacht wird, als Glieder dem angenommenen vorhergehen.

Das letzte Glied einer geometrischen Progression zu finden, wenn ihr erstes Glied, ihr Exponent und die Anzahl ihrer Glieder bekannt sind.

Die hiernach abgeleitete Rechnung wird Zins auf Zins-Rechnung genannt. . . . ⸗ 149

Ein jedes Glied einer geometrischen Progression ist dem Quozienten gleich, welcher entstehet, wenn man das letzte Glied mit der sovielten Potenz des Exponenten theilet, als Glieder dem angenommenen folgen.

Das erste Glied einer geometrischen Progression zu finden, wenn ihr letztes Glied, ihr Exponent und die Anzahl ihrer Glieder gegeben sind. . . ⸗ 150

Den Exponent einer geometrischen Progression zu finden, theile man das erste Glied durch das letzte und suche eine Zahl, die zur sovielten Potenz erhoben, als die Progression Glieder weniger 1 hat, dem Quozienten gleich ist, so ist solche der verlangte Exponent. . . §.151

Die Menge Glieder einer Progression zu finden, suche man den Quozienten des ersten und letzten Gliedes, und theile diesen so oft mit ihrem Exponenten, bis kein Rest bleibet. Sodann prüfe man, wie vielmal derselbe als Divisor gebraucht worden ist, und vermehre die Zahl, welche dieses anzeigt, um 1, so giebt die entstehende die Menge Glieder der Progression zu erkennen. . = 152

Die Summe der Glieder einer geometrischen Progression zu finden, multiplizirt man das letzte Glied mit ihrem Exponenten, nimmt vom entstehenden Produkte das erste Glied, und theilet diese Differenz mit ihrem um 1 verminderten Exponenten. . . . . . = 153

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Erste Abtheilung.

Von einigen allgemeinen Grundwahrheiten, und von der Entstehung und den Eigenschaften der Zahlen, und ihren Gesetzen.

§. 1.

Die Arithmetik *) ist eine Wissenschaft, welche lehret, die Natur und Eigenschaften der Zahlen zu erkennen, dieselben mit einander zu vergleichen, und aus gegebenen andere unbekannte zu finden.

§. 2.

Um richtige Begriffe von den Zahlen zu erhalten, müssen wir zuvor eine bestimmte Erklärung von dem kennen lernen, was wir überhaupt eine Größe nennen, und dann, wegen der zwischen ihnen anzustellenden Vergleichungen, was wir unter gleichen und ungleichen Größen verstehen. Demnach sagen wir

a. Eine Größe ist dasjenige, was sowohl vermehrt als vermindert werden kann.

b. Gleiche Größen sind, die einerlei Werth haben.

c. Ungleiche Größen hingegen, deren Werth verschieden ist, von denen die größere stets die kleinere und etwas mehr enthält, weshalb auch die kleinere ein Theil der größern genannt wird. Diesen

*) oder Rechenkunst.

Diesen Erklärungen zufolge, würden wir also einen Thaler und vier und zwanzig Groschen für gleiche Größen halten, weil der Werth eines Thalers dem Werthe von 24 Groschen völlig gleich ist. Hingegen einen louisd'or und einen Dukaten für ungleiche Größen, weil der Werth eines louisd'ors beträchtlicher ist, als der Werth eines Dukaten, von denen der louisd'or die größere, und der Dukaten einen gewissen Theil derselben ausmacht.

§. 3.

Nehmen wir nun eine Größe für sich selbst, aus deren Zusammensetzung eine unendliche Menge anderer Größen entstehen können, so nennen wir dieselbe in Rücksicht der Entstehenden schlechthin die **Einheit**, oder einen **Einer**, oder **Eins**; hingegen jede der Entstehenden in Rücksicht der Einheit eine **ganze Zahl**, welche demnach jederzeit eine Größe ist, die jede beliebige Menge Einheiten enthält.

Von den ganzen Zahlen.

§. 4.

Da offenbar eine unendliche Menge Zahlen entstehen müssen, wenn man die Einheiten bis ins Unendliche zusammensetzt; so dachte man darauf, jeder entstehenden einen Namen beizulegen, um sie durch denselben von einander unterscheiden zu können, welches auf folgende Weise wirklich geschah.

Die **Einheit**, als den Grund aller Zahlen, nannte man einen **Einer**, oder schlechthin **Eins**, wie bereits §. 3. erwähnet; sodann die entstehende Größe, da man noch einen Einer zum erstern setzte, zwei. Ferner fügte man zur zweiten noch einen Einer, und nannte die entstandene Größe **drei**; und indem man so fortfuhr, erhielt

hielt man noch die Größen vier, fünf, sechs, sieben, achte, neun und zehn.

Da man aber auch darauf denken mußte, daß diese Namen unter sich eine gewisse Beziehung hätten, nach der es dem Gedächtniß leicht würde, sie zu behalten, so kehrte man bei der letzt entstandenen Zehn zurück, betrachtete sie als eine neue Einheit, und gab ihr den Namen, ein Zehner, von dem man wiederum die Zahlen zwei Zehner, drei Zehner rc. zehn Zehner genau so, wie die vorigen aus eins entstehen ließ, und drückte die ersten neun ganz kurz durch zehn, zwanzig, dreißig rc. neunzig, und die letzte durch ein Hundert aus.

Ferner nahm man dieses eine Hundert als eine neue Einheit, setzte sie auf ähnliche Art bis zu zehn Hunderten zusammen, und nannte diese Größe wiederum als eine Einheit genommen, ein Tausend oder schlechthin Tausend.

Und endlich bestimmte man von dieser die Zehntausende und Hunderttausende, wie aus Eins die Zehner und Hunderte, bis man zehn hundert Tausende erhielt, die als eine neue Einheit, eine Million heißen mußten. So setzte man nun in gleicher Ordnung diese Million, wie die Einer, Zehner, Hunderte, Tausende, Zehntausende, Hunderttausende, bis Millionen Millionen zusammen, und nannte diese entstandene Größe eine Billion, aus welcher dann wieder die Millionen Billionen oder die Trillionen; aus dieser die Millionen Trillionen oder Quadrillionen, u. s. w. entstanden.

§. 5.

Denken wir jetzt der Entstehung der vorigen Zahlen nach, so kann man ein bei ihnen obwaltendes Gesetz nicht verkennen, welches bestimmt: daß zehn Einheiten einer Art, eine Einheit der nächst höhern Art geben, und deshalb gewöhnlich das zehntheilige Gesetz der Zahlen heißet; das von uns aber, weil es auf

alle mögliche Zahlen Einfluß hat, deren allgemeines Gesetz genannt wird.

Und ferner: daß eine jede Zahl eine Menge Einheiten einer Art angiebt, wie die Zahl zwei, zwei Einer; die Zahl funfzig, fünf Zehner, u. s. w. aber keine Einheiten verschiedener Art; daher man wohl fragen möchte: ob nicht mehrere Zahlen zwischen denselben statt finden? welches im folgenden Paragraph bestimmt wird.

§. 6.

Da wir nach dem allgemeinen Gesetz von einem Zehner zu zwei Zehnern u. s. w. von einem Hundert zu zwei Hunderten u. s. w. fortschritten, nahmen wir keine Rücksicht auf die Einer, um das erkannte Gesetz desto anschaulicher zu machen; bedenken wir aber, daß man einem Zehner einen Einer nach dem andern, oder die Zahlen zwei, drei, u. s. w. zusetzen kann, so folgt nothwendig, daß noch eine Menge Zahlen zwischen den schon bekannten statt finden könne. Wollen wir demnach die zwischen zehn und zwanzig fallende Zahlen bestimmen, so setzen wir zu einem Zehner noch einen Einer, so enthält dann die entstehende Zahl einen Zehner und einen Einer, weshalb wir sie einszehn nennen, und schlechthin durch das Wort Elf ausdrücken können. Setzen wir zu dieser Elfe noch einen Einer, oder zu Zehn noch zwei, so kann die entstehende Zahl, weil sie zwei Einer und einen Zehner enthält, zweizehn, und kürzer Zwölf genannt werden. Setzen wir ferner zu dieser Zwölf noch einen Einer, oder zu zehn noch drei, so enthält die entstehende Zahl einen Zehner und drei Einer, und wird darum Dreizehn genannt. Fahren wir auf gleiche Art fort, jeder entstandenen Zahl noch einen Einer, oder der Zehne die Zahl vier, fünf u. s. w. beizufügen, so bekommen wir Zahlen, welche nach und nach zehn und vier, zehn und fünf, zehn und sechs 2c. zehn und neun Einer enthalten, und durch vierzehn,

funf=

funfzehn ꝛc. neunzehn ausgedrückt werden; und fügten wir der letztern noch einen Einer bei, so würde keine andere Zahl als zwanzig entstehen, weil neun Einer und ein Einer, einen Zehner, der zu dem einen Zehner genommen, zwei Zehner giebt; (§. 4.) mithin sehen wir, daß zwischen zehn und zwanzig noch neun Zahlen statt finden, deren jede, wie eins bis zehn, um einen Einer größer, als ihre unmittelbar vorhergehende ist.

Eben so finden nun zwischen zwanzig und dreißig, zwischen dreißig und vierzig ꝛc. zwischen neunzig und hundert neun Zahlen statt, die von der Zusammensetzung aus zwanzig, dreißig ꝛc. neunzig, und aus eins, zwei, drei ꝛc. neun bestehen, also daß die an hundert grenzende Zahl neun und neunzig ist, weil zu derselben noch ein Einer genommen, die Zahl hundert geben muß, indem selbige sodann zehn Einer und neun Zehner, oder einen Zehner und neun Zehner, das ist zehn Zehner enthält.

Aehnliche Beschaffenheit hat es auch mit denen, zwischen ein hundert und zwei hundert, zwischen zwei hundert und drei hundert u. s. w. zu setzenden Zahlen, wo wir jeder Zahl der hunderte die Zahlen von eins bis neun und neunzig beifügen, also daß die auf ein hundert unmittelbar folgende Zahl keine andere seyn kann, als ein hundert und eins, auf welcher dann ein hundert und zwei, ein hundert und drei u. s. w. ein hundert und zehn, ein hundert und elf u. s. w. folgen, welche letztere mehrentheils drei verschiedene Arten von Einheiten zu erkennen geben, wie die hier benannte ein hundert und elf schon ein hundert, einen Zehner und einen Einer enthält. Da nun die zu ein hundert zu setzende Zahl neun und neunzig ist, so muß ein hundert neun und neunzig die an zwei hundert grenzende Zahl sein; und wirklich ist sie es auch: denn setzen wir zu ihr noch einen Einer, so würden die neun Einer ein Zehner, und dieser Zehner zu den neun Zehnern gethan, giebt ein hundert, was mit dem einen hundert zwei hundert bestimmt. So erhellet demnach, daß

zwischen ein hundert und zwei hundert, wie zwischen zwei hundert und drei hundert u. s. w. noch neun und neunzig Zahlen fallen müssen, die sich von den vorher bestimmten blos dadurch unterscheiden, daß sie nicht ein hundert, sondern zwei hundert oder drei hundert u. s. w. enthalten, wo an drei hundert die Zahl zwei hundert neun und neunzig; an vier hundert, die Zahl drei hundert neun und neunzig u. s. w. an Tausend die Zahl neun hundert neun und neunzig grenzet, zu der ein Einer gesetzt, die neun Einer in zehn, diese die neun Zehner in hundert, und endlich diese die neun Hundert in Tausend verwandelt.

Und eben so wird endlich offenbar, daß zwischen ein Tausend und zwei Tausend, zwischen zwei Tausend und drei Tausend u. s. w. eigentlich neun hundert und neun und neunzig Zahlen; und zwischen zehn Tausend und zwanzig Tausend, zwischen zwanzig Tausend und dreißig Tausend u. s. w. neun Tausend neun hundert und neun und neunzig Zahlen u. s. w. angetroffen werden müssen, die sämtlich nach und nach um einen Einer zunehmen.

§. 7.

Alle vorgefundene um einen Einer zunehmende Zahlen in ihrer natürlichen Folge nach und nach richtig auszusprechen, ist nun das, was man zählen nennt.

Wenn wir demnach sprechen; eins, zwei, drei, rc. oder zehn, elf, zwölf rc. so wird gesagt: man zählt.

§. 8.

Da das Schreiben sämtlicher Zahlen sehr beschwerlich war, so erfand man folgende zehn Zeichen, die man Ziffern nannte, durch die alle nur mögliche Zahlen vorgestellt werden können.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0*)
eins,	zwei,	drei,	vier,	fünf,	sechs,	sieben,	acht,	neun,	Null.

Wie wir aus den, ihnen beigesetzten Worten ersehen, so stellen die ersten neun Ziffern die ersten neun Größen vor, die wir gleich anfangs kennen gelernt haben §. 4., weshalb wir sie bedeutende Ziffern nennen wollen. Was aber die Zehnte, oder die Null betrift, so hat dieselbe für sich nicht den geringsten Werth, dienet uns aber als ein Hülfsmittel, den Werth einer jeden Zahl um zehn, hundert, tausend ꝛc. mal zu erhöhen, je nachdem sie ein mal, zwei mal, drei mal ꝛc. ꝛc. einer der vorigen neun Ziffern zur rechten gesetzt wird. Setzen wir sie also einmal einer der bedeutenden Ziffern zur rechten, so ist der Werth eines jeden in ihr enthaltenen Einers zu einem Zehner, mithin die ganze Zahl zu einer Zahl der Zehner erhoben worden; setzen wir sie zweimal zur rechten, so wird die Zahl der Einer, zu einer Zahl der Hunderte erhoben; und bei dreimaligem Ansetzen, zu einer Zahl der Tausende u. s. w. Mithin sind

die	Zehner,	Hunderte,	Tausende,	Zehntausende,	Hunderttausende,	Millionen ꝛc.
durch	10	100	1000	10000	100000	1000000
	20	200	2000	20000	200000	2000000
	30	300	3000	30000	300000	3000000
	40	400	4000	40000	400000	4000000
	50	500	5000	50000	500000	5000000
	60	600	6000	60000	600000	6000000
	70	700	7000	70000	700000	7000000
	80	800	8000	80000	800000	8000000
	90	900	9000	90000	900000	9000000
vorzustellen.						ꝛc.

*) Diese Reihe Zahlen wird das dekadische Zahlensistem genannt.

§. 9.

Betrachten wir nun die durch Ziffern vorgestellte Zahlen genau, so finden wir, daß sie eben diejenigen sind, die wir nach dem allgemeinen Gesetz §. 4. 5. haben entstehen lassen, und daß sie ihren **Werth** blos der **Stelle** zu danken haben, in welcher sie durch die **Nullen** gesetzt wurden: denn da die Einer die erste Stelle einnehmen, so müssen jetzt die **Zehner** die zweite Stelle, die **Hunderte** die dritte Stelle ꝛc. die **Millionen** die siebente Stelle **links** einnehmen; daher müssen wir sie von jetzt an nach **ihrer Stelle** beurtheilen, und durch **Worte nach ihrem wahren Werthe** ausdrücken lernen, welches man **Numeriren** heißt.

Sollten wir demnach den Werth der Zahl 32 bestimmen, so würden wir sprechen: da die 2 in der ersten Stelle, und die 3 in der zweiten Stelle stehet, so muß erstere **zwei Einer** und letztere **drei Zehner** enthalten, und mithin 32 **zwei und dreißig** ausgesprochen werden.

Und stellen wir eine ähnliche Beurtheilung bei folgenden Ziffern an, so ist klar, daß 485 durch **vier hundert fünf und achtzig**, 6074 durch **sechs tausend vier und siebenzig** u. s. w. angegeben wird.

§. 10.

So leicht es aber auch bei diesen Zahlen ist, so mühsam und beschwerlich würde es seyn, wenn gegebene Zahlen ungleich mehrere Ziffern hätten; deshalb müssen wir auf ein Hülfsmittel denken, wodurch es uns leicht wird, auch jede beliebige weit größere Zahlen bequem übersehen und mit Worten bestimmen zu können. Und so erinnern wir uns, daß, wie die Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. von Eins entstanden, also auch die Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. von Millionen, Billionen u. s. w. bestimmt wurden, und schließen ganz natürlich, daß wie die Zehner, Hunderte u. s. w. in der zweiten, dritten ꝛc. Stelle von der Stelle der Einer zu

stehen kamen, eben so die Zehner, Hunderte ꝛc. der Millionen, Billionen ꝛc. zu stehen kommen, und mithin ergiebt sich, daß ebenfalls für die Millionen, Billionen ꝛc. sechs Stellen, wie für die Einer zu nehmen sind; also daß von der ersten bis zur 6ten Stelle, blos Einer, Zehner, Hunderte, Tausende, Zehntausende und Hunderttausende angetroffen werden; hingegen von der 7ten bis 12ten Stelle, Einer, Zehner, Hunderte ꝛc. Hunderttausende von Millionen; ferner von der 13ten bis zur 18ten Stelle, die Einer, Zehner ꝛc. Hunderttausende von Billionen u. s. w. nach welcher richtigen Bemerkung folgende Regel zur Bestimmung des wahren Werthes einer gegebenen großen Zahl von selbst erhellet.

Man theile die gegebene Zahl von der Stelle der Einer zu sechs und sechs Stellen mit einem Strich in Klassen, und bezeichne deren zweite, dritte ꝛc. oberhalb mit 1. 2. 3. ꝛc. um daran die Millionen, Billionen ꝛc. ihrer Klasse zu erkennen. Ist dieses geschehen, so fange man an, von der höchsten Klasse die Zahlen nach ihren Tausenden und Einern zu drei und drei Stellen auszusprechen, und fahre so bis zu den niedrigsten Einheiten fort.

Sollte uns also die Zahl 4267938000000000000 gegeben seyn, so würden wir hier der gegebenen Regel folgen, wodurch dieselbe folgendes Ansehen erhält

$$\overset{3}{4}|\overset{2}{267938}|\overset{1}{000000}|000000|$$

und sprechen: sie enthalte 4 Trillionen, zwei hundert sieben und sechzig tausend neun hundert acht und dreißig Billionen.

Wäre aber $\overset{4}{743}|\overset{3}{284632}|\overset{2}{756932}|\overset{1}{249632}|847239$ gegeben, so würde dieselbe sieben hundert drei und vierzig Quadrillionen, zwei hundert vier und achtzig tausend sechs hundert zwei und dreißig Trillionen, sieben hundert sechs und funfzig tausend neun hundert zwei und dreißig Billionen,

zwei hundert neun und vierzig tausend sechs hundert zwei und dreißig Millionen, acht hundert sieben und vierzig tausend zwei hundert neun und dreißig heißen.

Und so würde 32400|500043|008006 (mit 2 und 1 über den Strichen) auch zwei und dreißig tausend vier hundert Billionen, fünf hundert tausend und drei und vierzig Millionen, acht tausend und sechs enthalten.

Endlich müßte man

4 | 3 | 2 | 1

320000|000000|405000|000009|000000.

320 tausend Quadrillionen, 405 tausend Billionen und 9 Millionen aussprechen.

Weiß man eine gegebene Zahl zu theilen, so braucht man auch nicht mehr dieser Regel in Bezeichnung der Zahl zu folgen; sondern man theilet mit 6 als der Anzahl Ziffern, die jede Klasse erhält, in die gegebene Menge Ziffern der Zahl, wie hier in 19, wo dann die entstehende Zahl 3 anzeigt, daß die übrigbleibende Ziffern Trillionen enthalten; hierauf nennt man sie, und geht sogleich im Aussprechen der Billionen, Millionen rc. bis zur niedrigsten Stelle fort.

§. 11.

Vergleichen wir jetzt den Werth einer jeden der vorigen Zahlen, die mehr als eine bedeutende Ziffer haben, mit dem Werthe, den jede ihrer bedeutenden Ziffern enthält; so müssen wir bekennen, daß jedesmal dieser ihrer kleiner, als der von der gegebenen Zahl ist. So z. E. ist der Werth von 364 größer als 300, oder 60, oder 4, weil dieser ihr gesammter Werth den von der Zahl 364 bestimmt. Erinnern wir uns aber, daß von ungleichen Größen, die kleinere ein Theil der größern genannt wird, §. 2. so können wir auch hier, wie bei jeder andern Zahl, die Zahl 364 betrachten, als sey sie von den Theilen 300, 60 und 4, das ist, aus so viel

ver=

verschiedenen Theilen zusammen gesetzt, als dieselbe bedeutende Ziffern hat.

So ist also auch immer 740932 aus den fünf Theilen 700000,40000,900,30, und 2 zusammen gesetzt, u. s. w.

§. 12.

Da wir nun eine jede in Ziffern gegebene Zahl mit Worten nach ihrem wahren Werthe ausdrücken, und stets als eine Größe betrachten können, die aus so viel verschiedenen Theilen zusammen gesetzt ist, als sie bedeutende Ziffern hat; so frägt sich noch: ob nicht eine solche Zahl auch nach dem ihr eigenthümlichen Gesetz bald größer oder kleiner gemacht werden könne? welches wir mit ja beantworten, und nunmehro auch zeigen müssen.

Schon oben §. 8. wurde behauptet, und bei den Zahlen der Einer wirklich dargethan, daß die Null das Hülfsmittel sei, vermöge dessen man eine jede Zahl zehn, hundert, tausend ꝛc. mal größer machen könne, wenn dieselbe ein, zwei, drei ꝛc. mal derselben zur rechten gesetzt würde, wovon wir uns leicht bei folgenden Zahlen überzeugen können.

Gesetzt, daß man die Zahl 4385, deren Theile 4000, 300, 80, und 5 sind, zehnmal größer machen sollte, so setzte man ihr zur rechten eine Null, wodurch 43850 entstehet, welche die verlangte Eigenschaft hat; denn von ihr sind die Theile offenbar 40000, 3000, 800, und 50, in welchen allen die bedeutende Ziffern eine Stelle höher stehen, als in den Theilen der vorigen Zahl. Da nun aber eine jede einzelne Ziffer zehnmal mehr Werth hat, wenn sie um eine Stelle höher gerückt ist, so folgt, daß alle Theile der Zahl 43850, und mithin die Zahl selbst zehnmal größer als die Zahl 4385 ist.

Eben so erhellet, daß 438500 um hundertmal, 4385000 um tausendmal u. s. w. größer als 4385 seyn muß.

Sollte

Sollte aber umgekehrt: eine Zahl zehnmal, hundertmal u. s. w. kleiner gemacht werden, so brauchen wir nur von der gegebenen eine, zwei u. s. w. Nullen weg zu nehmen.

Wäre demnach die Zahl 43850000 zehnmal kleiner zu machen, so nehme man von ihr eine Null weg, welches mit einem Strich durch die letzte Null angezeigt wird, wodurch wir also 4385000ø oder 4385000 erhalten; denn durch diese Wegnahme erfolgt die Verwandelung ihres Werthes dergestalt, daß ihre sämtlichen Theile um eine Stelle niedriger rücken, wodurch ein jeder offenbar, und mithin die Zahl selbsten zehnmal kleiner wird.

Eben so ist 438500øø hundertmal, 43850øøø tausendmal kleiner als 43850000.

Es wird also hier stillschweigend die Bedingung gemacht, daß die gegebene Zahl mit Nullen endigen müsse, deren Daseyn, wie wir künftig sehen werden, auch nicht nothwendig ist.

Uebrigens müssen wir wohl merken, daß nicht die geringste Veränderung bei den Zahlen entstehen kann, wenn ihnen zur linken Nullen angesetzt werden, weil dadurch ihre Stellen, die von der Stelle der Einer aus bestimmt worden sind, in nichts verrückt werden, weshalb man auch ihrer nicht besonders erwähnet hatte. So sind 32, so viel als 032, 0032; u. s. w.

Von den zehntheiligen Zahlen. *)

§. 13.

Da wir nun die Entstehung und die Eigenschaften der ganzen Zahlen kennen, so wollen wir jezt auch andere

Zah=

*) Diese zehntheilige Zahlen werden bei den Schriftstellern zehntheilige Brüche, und die Stellen, in welchen sie hinter dem Komma stehen, zehntheilige Stellen genannt, von welchen Benennungen wir die Ursachen unten §. 64. bei den Brüchen werden kennen lernen.

Zahlen betrachten, die ebenfalls nach dem allgemeinen Gesetz gebildet, und zehntheilige Zahlen genannt werden, weil sie einen geringern Werth als die Einheit, oder Eins haben.

So wie das Gesetz erforderte, daß zehn Einer einen Zehner; zehn Zehner ein Hundert u. s. w. bestimmten, §. 5. und mithin in umgekehrter Ordnung, ein Hundert, zehn Zehner; ein Zehner, zehn Einer enthalten sollte; eben also können wir annehmen, daß auch ein Einer oder Eins, zehn Einheiten enthalte, die wir Zehntheile nennen, weil ein jedes zehnmal so klein, als ein Einer seyn muß; eben so enthalte ein jedes Zehntheil zehn Einheiten, welche wir Hunderttheile nennen, weil jedes hundertmal so klein, als ein Einer ist; ferner ein jedes Hunderttheil zehn Einheiten, die wir aus gleichem Grunde Tausendtheile nennen, u. s. f. Nach welchem allen wiederum einleuchtet, daß auch bei diesen zehntheiligen Zahlen, zehn Einheiten einer Art, eine Einheit der nächst höhern Art bestimmen, wie solches dem Gesetze gemäß nothwendig war.

§. 14.

Um auch diese zehntheilige Zahlen mit Ziffern vorstellen zu können, erinnern wir uns, daß alle ganze Zahlen ihren Werth blos von der Stelle erhielten, in der sie durch ihre Ziffern gesetzt wurden, §. 9. und folgern, daß solches ebenfalls bei diesen zehntheiligen Zahlen statt finden müsse; daher also nur die einzige Schwierigkeit aus dem Wege zu räumen ist, woran man die zehntheilige Zahlen von den ganzen Zahlen zu unterscheiden habe, welches nun durch einen Punkt, oder noch besser durch ein Komma geschiehet, das man der Stelle der Einer zur rechten setzet. Denn, zeigt das Komma für immer an, daß die ihm zunächst linker Hand stehende Ziffer blos Einer enthält, so ist klar, daß man einer gegebenen ganzen Zahl alsdann jede beliebige Menge Nullen zur rechten,

ten, wie sonst zur linken §. 12. anfügen könne, ohne die geringste Veränderung ihres Werths zu bewirken; demnach sind 32 immer so viel als 32,0 oder 32,00 u. s. w. und eben so kann es auch dann nicht geschehen, wenn dem Komma zur rechten keine Nullen, sondern bedeutende Ziffern gesetzt werden, so daß 32, auch noch immer 32 in der Zahl 32,46 bleiben müssen.

Und ferner, da jede Einheit einer Stelle, aus zehn Einheiten der ihr zunächst rechter Hand befindlichen Stelle bestimmt wird: daß die dem Komma zur rechten befindliche Stelle, nichts anders als Zehntheile, die nächst dieser folgenden, oder in der dritten Stelle stehenden Ziffern, (wobei wir immer die Stelle der Einer mitrechnen) Hunderttheile, die in der vierten Stelle rechtsstehenden Tausendtheile rc. rc. anzeigen müssen.

Wollten wir also die zehntheiligen Zahlen für sich allein mit Ziffern darstellen, so können wir, allem Misverständniß vorzubeugen, dem Komma, was leicht für 1. genommen werden könnte, eine Null in der Stelle der Einer vorsetzen, welchem zufolge die zehntheiligen Zahlen in folgender Ordnung zu setzen wären:

Zehntheile.	Hunderttheile.	Tausendtheile.	Zehntausendtheile.	Hunderttausendtheile.
0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
0,2	0,02	0,002	0,0002	0,00002
0,3	0,03	0,003	0,0003	0,00003
0,4	0,04	0,004	0,0004	0,00004
0,5	0,05	0,005	0,0005	0,00005
0,6	0,06	0,006	0,0006	0,00006
0,7	0,07	0,007	0,0007	0,00007
0,8	0,08	0,008	0,0008	0,00008
0,9	0,09	0,009	0,0009	0,00009

§. 15.

Betrachten wir jetzt die zehntheiligen Zahlen in ihren Stellen, so nehmen wir wahr, daß sie mit den ganzen

Zahlen

Zahlen nach ihrer ähnlichen Benennung ähnliche Stellen einnehmen: so stehen die Zehntheile in der 2ten Stelle rechts, wie die Zehner in der 2ten Stelle links standen; die Hunderttheile in der dritten Stelle rechts, wie die Hunderte in der 3ten Stelle links; die Tausendtheile in der 4ten Stelle rechts, wie die Tausende in der 4ten Stelle links u. s. w. wobei wir immer die Stelle der Einer für beide Zahlen-Gattungen gemein nahmen; welche Bemerkung uns ganz natürlich darauf leitet, auch hier den Werth einer zehntheiligen Zahl nach den Stellen zu bestimmen, die ihre Ziffern einnehmen, oder zu numeriren. Sollte z. E. die Zahl 0,456 mit Worten ausgedrückt werden, so würden wir sagen: sie enthalte 4 Zehntheile, 5 Hunderttheile und 6 Tausendtheile, weil die Ziffer 4 in der 2ten Stelle, 5 in der 3ten, und 6 in der 4ten stehet; oder auch: sie enthalte 456 Tausendtheile, weil 0,4 so viel als 0,400, und 0,05, so viel als 0,050, d. h. 4 Zehntheile so viel als 400 Tausendtheile u. s. w. gelten müssen, da die angefügten Nullen die Ziffern nicht aus ihren Stellen verrücken; von welchen beiden Arten sich auszudrücken, die letztere bei so geringen Zahlen den Vorzug verdient, ob gleich die erstere gewöhnlicher ist.

Und wäre uns eben diese Zahl unter folgender Gestalt 0,4560 gegeben, so würden wir ebenfalls sagen können: sie enthalte 456 Tausendtheile, oder 4560 Zehntausendtheile.

Eben so würde 0,45600 sowohl durch 456 Tausendtheile, als durch 45600 Hunderttausendtheile ausgedrückt werden können, welches wir wohl bemerken müssen.

Wir haben also eigentlich bei der letztern Aussprache zweierlei zu beobachten; nemlich, was die Zahl giebt, wenn sie nicht als zehntheilige Zahl betrachtet wird, wie im letztern Fall 45600, und sodann die Stelle, worinnen ihre niedrigste Ziffer endet, wornach sie ihre Benennung erhält, wie hier die Hunderttausendtheile.

Eben so würden wir die Zahl 0,4327653, 4 Millionen 327 Tausend 653 zehn Millionentheile nennen, weil die niedrigste Ziffer 3 in der Stelle der zehn Millionentheile befindlich ist.

Wäre aber eine zehntheilige Zahl mit sehr vielen Ziffern gegeben, so theilen wir sie, wie bei den ganzen Zahlen, entweder von der Stelle der Einer an, in Klassen zu 6 Ziffern rechter Hand fort, wo wir die fehlende Stellen der niedrigsten Klasse mit Nullen ersetzen, und bringen in gleicher Ordnung die Ziffern 1. 2. u. s. w. über dieselben, um ihre Millionen, Billionentheilchen u. s. w. anzuzeigen, und sprechen nachdem dieselben von der höchsten bis zur niedrigsten zu 3 und 3 Stellen aus. Oder wir nehmen von der Zahl blos die bedeutende Ziffern, theilen sie von ihrer niedrigsten Stelle aus, wie bei den ganzen Zahlen, und nachdem wir sie ebenfalls so ausgesprochen haben, geben wir ihr zuletzt die Benennung, die ihre niedrigste Stelle erfordert.

Demnach ist nach ersterer Art:

$$0,|000\overset{1}{3}64|56\overset{2}{7}324|32\overset{3}{0}000$$

364 Millionentheile, 567324 Billionentheile, und 320 tausend Trillionentheile.

Hingegen nach der anderen Art:

$$0,00|03\overset{1}{6}456|732432$$

36 Tausend 456 Millionen, 732 tausend 432 hundert Billionentheile, weil die Ziffer 2 vom niedrigsten Werthe hundert Billionentheile anzeiget.

Würde uns endlich eine Zahl gegeben, die sowohl ganze als zehntheilige Zahlen enthielte, so ist einleuchtend, daß wir ihre Eintheilung von der Stelle der Einer, oder wie bei den ganzen Zahlen machten, und mithin dieselbe zuletzt nach ihrer niedrigsten Stelle benennten.

So ist demnach

$$\overset{2}{6}4|21\overset{1}{0}097|,310000,310000|23\overset{1}{4}200|48\overset{2}{7}000|$$

64 Bil-

64 Billionen 210 tausend und 97 Millionen, 310 Tausend, und 234 tausend und 200 Millionentheile, und 487 Billionentheile:

Oder auch:

$$64\overset{3}{2}10|097\overset{2}{3}10|000,\overset{1}{2}34|200487|$$

64 tausend 210 Trillionen 97 tausend 310 Billionen 234 Millionen 200 tausend 487 von 100 Millionentheilen.

So wüßten wir nun alles, was beim Numeriren der zehntheiligen Zahlen zu wissen nöthig war, und es liegt uns noch ob, zu zeigen, wie auch hier die zehntheiligen Zahlen durch Verrückung ihrer Stellen größer und kleiner gemacht werden können, welches der folgende §. lehren mag.

§. 16.

Um eine zehntheilige Zahl zehnmal, hundertmal 2c. größer oder kleiner zu machen, brauchen wir ihr keine Nullen anzusetzen oder wegzunehmen, wie wir bei den ganzen Zahlen gesehen haben (§. 13); sondern eben das Komma, welches uns bisher diente, die ganzen Zahlen von den zehntheiligen Zahlen zu unterscheiden, gewähret uns bei allen möglichen Zahlen, welche zum allgemeinen Gesetz gehören, diesen Vortheil, der in diesem Betracht einer der wichtigsten in der ganzen Rechenkunst ist, wobei wir nur folgendes beobachten dürfen:

Soll eine Zahl um 10, 100, 1000 u. s. w. mal größer oder kleiner gemacht werden, so rücke man das Komma um eben so viel Stellen als 10, 100, 1000 2c. Nullen haben, zur rechten oder linken Hand.

Wäre demnach die Zahl 0,00456 gegeben, die zehnmal größer gemacht werden sollte, so würden wir das Komma eine Stelle weiter zur rechten rücken, und mithin 00,0456 erhalten, welche Zahl die verlangte Eigenschaft

 hat:

hätte; denn es ist offenbar, daß die gegebene Zahl 0,00456 aus den Theilen 0,004; 0,0005; und 0,00006, hingegen die gefundene 00,0456 aus 0,04; 0,005 und 0,0006 bestehet; vergleichen wir nun die Stellen der letztern mit den Stellen der erstern, so sehen wir, daß sie sämtlich eine Stelle höher stehen, folglich auch alle, und mithin die Zahl selbst einen zehnmal größern Werth, als die gegebenen haben müssen.

Eben also läßt sich begreifen, daß wie von
0,00456
die Zahl 00,0456 zehnmal größer ist, also auch
000,456 hundertmal = = = =
0004,56 tausendmal = = = =
00045,6 zehntausendmal größer u. s. w.
seyn muß, wo wir das Komma um 2,3 u. s. w. Stellen zur rechten rückten; und eben so leicht nach umgekehrtem Verfahren: weil 0,00456 so viel als 000000,00456 gilt, daß von 0,00456
die Zahl 0,000456 zehnmal kleiner
0,0000456 hundertmal
0,00000456 tausendmal kleiner seyn muß, allwo wir das Komma um 1. 2 u. s. w. Stellen zur linken gerückt haben.

Sind endlich ganze Zahlen mit zehntheiligen Zahlen verbunden, und man will dieselben, um zehn, hundert ꝛc. mal größer oder kleiner machen, so dürfen wir nur, wie bisher verfahren, welches nach den vorigen Beispielen von selbst einleuchtet.

Wäre demnach die Zahl 40563240,98325 so ist
zehnmal größer = 405632409,8325
hundertmal = = 4056324098,325
tausendmal = = 40563240983,25 u. s. w. hingegen
zehnmal kleiner = 4056324,098325
hundertmal = = 405632,4098325
tausendmal = = 40563,24098325 u. s. w.

§. 17.

Da wir nun mit den uns bisher bekannt gewordenen Zahlen keine andere Begriffe verbinden können, als die ihnen nach dem allgemeinen Gesetze zukommen, so wollen wir dieselben abstrakte oder unbenannte Zahlen nennen, die, wie wir sogleich sehen werden, zur Vergleichung wirklicher Größen, von denen sie dann noch einen besondern Werth erhalten, schlechterdings nothwendig sind.

Von den benannten Zahlen.

§. 18.

So gewiß das, was vermehret oder vermindert werden kann, eine Größe ist (§. 2.) so unläugbar sind die unsern Sinnen merklich werdende Dinge Größen, welche nach ihren verschiedenen Eigenschaften unter einander verglichen, und nach denselben ihre bestimmten Gesetze haben können. Sehen wir bei Dingen z. E. blos auf ihre Gestalt, so betrachten wir eigentlich den von ihnen eingenommenen Raum, welchen zu bestimmen wir sie nothwendig mit dem Raume von Dingen gleicher Art vergleichen müssen, wobei dann gefragt wird: wie groß sind die Dinge? und eigentlicher: wie groß ist der Raum, den diese Dinge, gegen den Raum irgend eines anderen verglichen, einnehmen? Aehnliche Bewandniß hat es, wenn bei Dingen auf ihre Schwere, oder auf ihre Werthe ꝛc. gesehen wird.

Ferner giebt es Dinge, bei denen zwar vorige Eigenschaften nicht in Betrachtung kommen, die aber doch zusammen gezählt werden können, und in so ferne auch besondere Gesetze erhalten haben, nach welchen man von ihnen eine beliebige Menge als ein Ganzes ansehen, und auf ähnliche Art mit dem entstehenden Ganzen verfahren muß. Und da nun zur Vergleichung dieser verschiedenen Größen, die unbenannten Zahlen un-

entbehrlich sind; so sehen wir, daß diese, nach denen hier willkührlich bestimmten Gesetzen, (die sich nach den Umständen der Zeit und der länder oft verändern,) außer ihrem nach dem allgemeinen Gesetze erhaltenen Werthe, noch einen besondern erhalten müssen, welches der ihnen beigesetzte Name jederzeit anzeiget, und weshalb sie **konkrete oder benannte Zahlen** genannt werden.

§. 19.

Da wir ebenfalls die Gesetze der konkreten Zahlen kennen müssen, um die im gemeinen leben vorkommende Rechnungen bestimmen zu können; so wollen wir folgende höchstnöthige Gesetze uns bekannt machen.

In Ansehung des längenmaßes hat man zweierlei Gattungen; nemlich das **Landmaß** oder **Feldmaß**, oder zehntheilige Maß; und sodann das **Bau**= oder zwölftheilige Maß.

Nach dem landmaß soll

1 Meile nicht mehr als	2000	Ruthen
1 Ruthe = = =	5	geometrische, oder
	6	gewöhnliche Schritte
1 geometrischer Schritt	2	geometrische Fuß ꝛc.

Oder

1 Meile = =	10000	geometrische, oder
	12000	gewöhnliche Schritte,
5 geometrische Schritte	1	Ruthe
1 Ruthe = =	10	Fuß
1 Fuß = =	10	Zoll
1 Zoll = =	10	linien
1 linie = =	10	Punkte ꝛc.

Nach dem Baumaß soll hingegen

1 Ruthe = =	12	Werkschuhe
1 Schuh = =	12	Zoll
1 Zoll = =	12	linien
1 linie = =	12	Punkte ꝛc. haben.

Um in der Folge uns kurz ausdrücken zu können, wollen wir Ruthen mit (°), Fuße mit ('), Zolle mit (''), und Linien mit (''') u. s. w. bezeichnen; demnach heißet 7° 5' 6'' 4''' Landmaß, oder 7564''', (weil das Gesetz desselben, mit dem allgemeinen Gesetze der Zahlen gleichstimmt,) 7 Ruthen, 5 Fuß, 6 Zoll und 4 Linien, oder auch 7564 Linien. Hingegen 5° 9'' 11''' 10'''' Baumaß, das man immer an der einzelnen Bezeichnung erkennen wird, 5 Ruthen, 9 Zoll, 11 Linien und 10 Punkte.

Wir gedenken hier nicht des geometrischen Flächen- oder Körpermaßes, weil dieser ihre Gesetze in der Geometrie vollständig auseinander gesetzt werden.

In Ansehung des Körpermaßes, wo nach Gefässen zugemessen wird, ist uns das Getreidemaß zu wissen nöthig, welches will, daß

1 Wispel	soll	24 Scheffel
1 Scheffel	=	4 Viertel
1 Viertel	=	4 Metzen enthalten.

Die Anfangs-Buchstaben der Wörter Wispel u. s. w. mögen hier die verschiedenen Größen bezeichnen.

Ferner das Kramer-Gewicht will:

1 Centner	soll	110 Pfunde
1 Pfund	=	32 Lothe
1 Loth	=	4 Quentchen enthalten.

Diese verschiedenen Ausdrücke zu bezeichnen, mag Ctr. den Centner, ℔. das Pfund, L. das Loth, Qt. das Quentchen andeuten.

Endlich der hiesige Landes Münz-Fuß will:

1 Friedrichs d'or	soll	5 Thaler	8 Groschen
1 Reichsthaler	=	=	24 Groschen
1 Groschen	=	=	12 Pfenninge enthalten.

Man bezeichnet den Friedrichs d'or mit Fr. d'or, den Reichsthaler mit Thl., den Groschen mit Gr. und den Pfenning mit Pf.

Von

Von zusammen gezählten Dingen wählen wir das Gesetz, was fürs Papier eingeführt ist; nehmlich

1 Ballen soll 10 Rieß
1 Rieß = 20 Buch
1 Buch = {24 Bogen Schreibe / 25 = Druck} Papier enthalten.

§. 20.

Um nun sowohl gleiche als ungleiche Größen vorstellen zu können, wollen wir uns folgender allgemein angenommenen Zeichen bedienen, die zwischen dieselben gesetzt werden.

Diese beiden Striche ($=$) mögen die Gleichheit; und dies liegende Vau ($>$) die Ungleichheit zweier Größen anzeigen, von welcher die offne Seite gegen die Größe von höherm Werth zu liegen kömmt.

Demnach heißen die Ausdrücke $1^{\circ} = 12'$, eine Ruthe beträgt 12 Fuß; 1 Ctr. $=$ 5 St. ein Centner hat 5 Steine; 1 Thl. $=$ 24 Gr. Ein Reichsthaler ist so viel als 24 Groschen u. s. w.

Hingegen $18 > 15$, Achtzehn ist größer als funfzehn; $9 < 23$, Neun ist kleiner als drei und zwanzig; 1 ℔ $>$ 23 L. Ein Pfund ist größer als drei und zwanzig Loth; 18 Gr. $<$ 1 Thl., achtzehn Groschen beträgt weniger als ein Thaler u. s. w.

§. 21.

Ehe wir endlich zu den verschiedenen Rechnungs-Arten übergehen, können wir noch folgende Sätze uns wohl bekannt machen und annehmen; sie werden Grundsätze genannt, weil sie, nach der Kenntniß, die wir von den Größen und Zahlen erhalten haben, keiner nähern Erklärung, oder keines besonderen Beweises bedürfen.

Wir

Wir bezeichnen sie mit den Buchstaben a, b, c, ꝛc. weil wir sie gelegentlich anführen werden, und ihnen noch andere nachfolgen sollen.

a. Eine Größe ist sich selbst gleich.

b. Eine Größe ist allen ihren Theilen zusammen genommen gleich. So ist 1 = 1,0 oder 1 Gr. = 12 pf.

c. Eine Größe ist größer, als einer ihrer Theile; oder auch als einige ihrer Theile zusammen genommen. So ist 1 ℔ > 31 L., 1 ℔ > 1 L. oder 1 > 0,9.

d. Umgekehrt: Ein, oder einige Theile zusammen genommen sind kleiner, als ihr Ganzes. So ist 0,5 < 1; 3 Ctr. < 1 L.

e. Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie unter sich gleich. Also, weil 4 = 4,0, und 4 = 4,00; so ist 4 = 4,0 = 4,00; oder weil 1 Thl. = 24 Gr., und 24 Gr. = 288 Pf.; so ist 1 Thl. = 24 Gr. = 288 Pf. u. s. w.

Zweite Abtheilung.

Von den vier Rechnungs-Arten mit ganzen, zehntheiligen, und benannten Zahlen.

§. 22.

So verschieden die Zahlen behandelt werden mögen, so kömmt es doch bei einer jeden eigentlich darauf an, ob dieselben vermehrt oder vermindert werden sollen, und weil dieses geschehen kann, entweder daß man einer, eine oder mehrere von ihr verschiedene, oder eine ihr gleiche, Zahl, bestimmte mal zusetzen, oder auch unter gleicher Bedingung hinweg nehmen muß; so ergeben sich für diese verschiedenen Fälle vier besondere Behandlungen, die unter den vier Rechnungsarten verstanden, und die Addizion, Subtrakzion, Multiplikazion und Division genannt werden.

Um diese verschiedenen Rechnungsarten anzudeuten, hat man für gut befunden, sie unter folgenden Zeichen vorzustellen; nemlich

Bey der Addizion dienet das Zeichen (+) welches zwischen den Größen gestellet wird; also würde $5 + 3 = 8$; und $2 + 4 + 5 = 11$ seyn u. s. w.

Bei der Subtrakzion hingegen (—), und so würde $5 - 3 = 2$ seyn.

Bei der Multiplikazion aber, entweder (. oder ×) und mithin würde $5 . 3 = 5 \times 3 = 15$ seyn.

Endlich bei der Division ein (:), oder ein zwischen beiden Größen gezogener Strich; demnach würde $6 : 3 = 2$, oder $\frac{6}{3} = 2$ seyn, wovon eine jede Vorstellung ein Ausdruck genannt wird.

Uebrigens müssen wir hier erinnern, daß oftmals in einer Rechnung, in welcher alle vier Rechnungs-

arten vorkommen können, die Größen, welche eine derselben besonders verlangen, in Parenthesen eingeschlossen werden, wo wir dann blos die in denselben befindlichen als eine einige Größe betrachten, die aus ihrer angezeigten Rechnungsart entspringt; So würden wir von $6 : 2 + (5 \cdot 3) - (5 - 3) + 3$ verstehen, weil $6 : 2 = 3$, $5 \cdot 3 = 15$, $5 - 3 = 2$ und $3 = 3$ ist, $3 + 15 - 2 + 3 = 3 + 15 + 3 - 2 = 19$.

Und da nun bei jeder Rechnung diese vier Rechnungsarten unentbehrlich sind, so mögen wir sie nie genugsam anempfehlen; weshalb wir sie auch sogleich unserer Absicht gemäß nach möglichster Deutlichkeit auseinander setzen wollen.

Erste Rechnungsart.

Von Zusammensetzung der Zahlen oder der Addizion.

§. 23.

Addiren heißt eine Zahl finden, die andern gegebenen zusammen genommen gleich ist.

Die gegebenen Zahlen wollen wir die Summirenden, und die aus der Rechnung entstehende Zahl die Summe nennen.

Wäre demnach der Ausdruck $2 + 3 + 4 = 9$ gegeben, so würden wir $2 + 3 + 4$ die Summirenden, und 9 deren Summe nennen.

Es ist für sich klar, daß die gegebenen Zahlen unter einerlei Gesetz gehören, das ist, von einerlei Art seyn müssen: denn so würden weder Thl. mit Ibden u. s. w. addiret werden können, weil die entstehende Summe, weder Thl. noch Ibde für sich geben könnte. Da nun aber die ungenannten Zahlen zu dem allgemeinen Gesetz gehören, so können wir bei denselben anfangen, und nach-

 her

her die benannten Zahlen folgen lassen, wo wir auf ihr Gesetz besonders Rücksicht nehmen müssen; welche Ordnung wir auch bei allen übrigen Rechnungsarten beobachten wollen.

§. 24.

Um nun von den leichtern zu den schwerern Aufgaben auf eine leichte Art überzugehen, wollen wir die gegebenen Zahlen unter drei Fälle nehmen:

a. Mögen die gegebenen Zahlen eine bedeutende Ziffer haben, welche Einheiten von gleichem Werthe enthalten.

b. Solche, die ebenfalls eine bedeutende Ziffer haben, deren Einheiten aber verschiedenen Werth enthalten.

c. Endlich solche, die verschiedene bedeutende Ziffern haben.

Dem ersten Fall gemäß werde uns die Frage vorgelegt: Was ist die Summe der Zahlen $5 + 9 + 4$?

Diese Frage oder Aufgabe aufzulösen, setze man die gegebenen Zahlen in einer Reihe untereinander, und mache unter ihnen einen Strich; sodann theile man sämtliche Zahlen, außer der ersten, in ihre Einer, die wir ihnen zur Seite setzen können; endlich zähle man zur obern Zahl alle Einer der übrigen, und drücke die daraus entstehende Zahl, unter dem gezogenen Strich mit Ziffern aus, so wird dieselbe die verlangte Summe seyn.

Wir setzen demnach

$$\text{Die summirende Zahlen}\begin{cases}5 = 5\\ 9 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1\\ 4 = 1+1+1+1\end{cases}$$

Die Summe 18

und sprechen $5 + 1$ geben 6, und 1 geben 7, und 1 geben 8 u. s. w. endlich 17 und 1 geben 18, von der wir

die

die 8 gerade unter die gegebenen Zahlen, und den Zehner eine Stelle höher zur linken setzen.

Um uns aber zu überzeugeu, daß die gefundene Zahl 18 die Summe der gegebenen sei, so sprechen wir: Da die gegebenen Zahlen die ihnen zur Seite gesetzte erste Zahl und sämtliche Einer enthalten, und eben diese erste Zahl mit sämtlichen Einern, in der gefundenen Summe genau enthalten ist, so folgt nach dem 5ten Grundsatze §. 21., daß die gegebenen Zahlen, wie die Summe, eine gleiche Menge Einer enthalten müssen.

Wir sehen wohl ein, daß auf diese Art eine Summe sehr mühsam erhalten wird, und bei noch mehrerern gegebenen Zahlen solche Rechnung weit beschwerlicher werden müsse; daher müssen wir uns bestreben, die Fertigkeit zu erlangen, alle mögliche Zahlen, ohne ihre Einheiten uns vorzustellen, folgendermaaßen zusammen zu setzen; nehmlich, hat man die gegebenen Zahlen, wie vorher, in eine Reihe gesetzt, und unter ihnen den Strich gezogen, so nehme man zur ersten Zahl die zweite, zur entstehenden die dritte u. s. w. und hat man zur vorletzt gefundenen die letzte gesetzt, so wird ebenfalls die entstehende Zahl die verlangte Summe, welche endlich unter den Strich gebracht wird, und deren Richtigkeit auf vorigen Beweis beruhet.

Wäre demnach der Ausdruck 40 + 70 + 80 + 90 aufzulösen, so setzten wir:

	40
	70
	80
	90
Summe	280

und sagten: 4 und 7 giebt 11, und 8 ist 19, und 9 giebt 28 Zehner, oder 2 Hunderte und 8 Zehner zur Summe, davon die 8 Zehner unter die addirte Zehner, und die 2 Hunderte eine Stelle höher gesetzt werden müssen.

Da

Und weil mit allen andern gegebenen ähnlichen Zahlen eben so verfahren werden muß, so ist einleuchtend, daß 0,5 + 0,7 + 0,9 + 0,6 = 2,7; wie auch 0,003 + 0,004 + 0,006 + 0,008 + 0,005 = 0,026 u. s. w.

Da es nun nicht mehr schwer fallen kann, die Summe aller möglichen Zahlen dieser Art zu finden, so gehen wir von denselben zum zweiten Falle über.

§. 25.

Würde dem zweiten Falle gemäß gefragt: wie groß ist die Summe von 800 + 60 + 500 + 90? so setze man diese gegebenen Zahlen dergestalt untereinander, daß eine jede bedeutende Ziffer ihre wahre Stelle einnehme, ziehe unter ihnen einen Strich, und addire sie Reihenweise, von der niedrigsten Stelle anfangend, zusammen; finden wir dabei, daß irgend einer Reihe Summe, Einheiten der nächst höhern Stelle angiebt, so setzen wir diese nicht sogleich hin, sondern addiren sie zu der Zahlen-Reihe der nächst höhern Stelle; es müßte denn die Zahlen-Reihe der höchsten Stelle selbst seyn.

Demnach setzen wir:

	800
	60
	500
	90
Summe	1450

und sprechen: Kein Einer in der Reihe der Einer giebt keinen Einer, setzen also unter dieser Reihe eine Null; ferner 9 und 6 giebt 15 Zehner, setzen die 5 hin, und sprechen, 1 vorgefundenes Hundert und 5 geben 6, und 8 geben 14 Hunderte, die wir völlig hinsetzen; und folglich ist die verlangte Summe 1450, welches keines Beweises bedarf.

Auf gleiche Art ist einleuchtend, daß 50 + 8 + 90 + 0,7 + 0,5 = 149,2 ist, u. s. w.

§. 26.

Soll endlich nach dem dritten Falle der Ausdruck 546 + 713 + 402 + 96 aufgelöset werden, so setzen wir die Zahlen dergestalt untereinander, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, u. s. w. und wären zehntheilige Zahlen mit ihnen verbunden, daß auch Zehntheile unter Zehntheile u. s. w. zu stehen kommen, und addiren die entstehenden Zahlenreihen nach dem zweiten Fall zusammen; also setzen wir:

	546
	713
	402
	96
die Summe	1757

Wäre aber der Ausdruck 0,456 + 7,84 + 95,47 + 0,83 + 564 aufzulösen, so müssen wir setzen:

	0,456
	7,84
	95,47
	0,83
	564
Summe	668,596 u. s. w.

§. 27.

Endlich haben wir noch zu merken, daß bei einer großen Menge Zahlen die Rechnung erleichtert wird, wenn man dieselbe in Abschnitte bringt, deren Summen bestimmt, diese zur Seiten herausrückt, und zuletzt von diesen die verlangte Summe suchet, wie folget:

348,569 25,634 5,098	379,301	Summe des ersten Abschnitts
7,263 48,569 599,754	655,586.	⸗ ⸗ zweiten ⸗
60,087 2,34 8,009	70,436	⸗ ⸗ dritten ⸗
	1105,323	verlangte Summe.

§. 28.

Sollten wir die Summe benannter Zahlen bestimmen, so müssen wir bei ihnen Rücksicht auf das Gesetz nehmen, zu welchem die gegebenen Größen gehören; waltet aber bei ihnen kein Gesetz ob, so setzen wir die von gleicher Art untereinander, und verfahren mit ihnen, wie bisher gezeigt worden ist.

Würde z. E. gesagt: es sind von einem Regimente drei Kommandos abgeschickt worden, wovon das erste aus 1 Kapitän, 3 Lieutenants, 8 Unteroffizier, 1 Tambour, und 90 Gemeine; das 2te aus 2 Kapitäns, 7 Lieutenants, 18 Unteroffizier, 2 Tambour und 216 Gemeine; und das 3te aus 2 Lieutenants, 4 Unteroffizier und 50 Gemeine besteht, und hierauf gefragt: wie viel Kapitäns, Lieutenants u. s. w. sich auf Kommando befänden, so sehen wir, daß bei diesen benannten Zahlen, wie es deren noch mehrere giebt, kein Gesetz obwaltet, weshalb wir setzen müssen:

Das 1te Kommando best. aus	1	Kap.	3	Lieut.	8	Untoffz.	1	Tamb.	90	Gem.
2te ⸗ ⸗	2	⸗	7	⸗	18	⸗	2	⸗	216	⸗
3te ⸗ ⸗	⸗	⸗	2	⸗	4	⸗	⸗	⸗	50	⸗
mithin sind auf Kommando	3	Kap.	12	Lieut.	30	Untoffz.	3	Tamb.	356	Gem.

Ferner erhalte 1 Major zum Unterhalt seiner Pferde 2 Wispel 8 Scheffel und 1 Viertel; ein Kapitän 1 Wispel

Wispel 10 Scheffel; und 1 Lieutenant 8 Scheffel 1 Viertel und 3 Metzen Haber monatlich; man frägt: wie viel sämtliche Offiziers bekommen? Da wir bei dieser Aufgabe auf das Gesetz des Getreidemaßes sehen müssen, so setzen wir

	2 Wispel	8 Scheffel	1 Viertel	3 Metzen
	1 „	10 „	— „	— „
	— „	8 „	1 „	— „
Summe	4 Wispel	2 Scheffel	2 Viertel	3 Metzen.

und sprechen: 3 Metzen geben 3 Metzen, 1 Viertel und noch eins, geben 2 Viertel; 10 + 8 + 8 Scheffel geben 26 Scheffel, setzen die 2 Scheffel hin, und weil die anderen 24 Scheffel 1 Wispel machen, so folgt, daß dieser eine, und 2 + 1, in allen 4 Wispel geben; und mithin erfahren wir, daß die monatliche Ration eines Majors, Kapitäns und Lieutenants zusammen genommen 4 Wispel 2 Scheffel 2 Viertel und 3 Metzen beträgt.

Ferner habe jemand zu verschiedenen Zeiten Pulver empfangen, also daß er für 2 Ctr. und 109 ℔, 89 Thl. 2 Gr. 6 Pf., hierauf für 1 Ctr. und 55 ℔, 48 Thl. und 3 Gr. und endlich für 98 ℔, 32 Thl. und 16 Gr. zu geben verbunden war; man frägt: wie viel Pulver er empfangen, und wie viel es koste?

Nach diesen Bedingungen sind eigentlich 2 Aufgaben in einer einigen vorgetragen, daher wir die Größen nach ihren Gesetzen folgendermaaßen stellen müssen:

2 Ctr.	109 ℔	kosten	89 Thl.	2 Gr.	6 Pf.
1 „	55 „	„	48 „	3 „	— „
„ „	98 „	„	32 „	16 „	— „
5 Ctr.	42 ℔	mußten kosten	169 Thl.	21 Gr.	6 Pf.

Da wir nun diese gegebenen Beispiele hinreichend achten, uns in allen ähnlichen Fällen helfen zu können; so wenden wir uns zu der zweiten Rechnungsart.

Zweite Rechnungsart.

Von Abziehung der Zahlen oder der Subtrakzion.

§. 29.

Subtrahiren heißt eine Zahl finden, welche anzeigt, um wieviel eine Zahl größer als die andere ist.

Nach dieser gegebenen Erklärung erhellet, daß nur von zwei gegebenen Zahlen die Rede ist, nach welchen eine unbekannte bestimmt werden soll, und daß diese nicht anders entstehen kann, als wenn von der einen gegebenen die andere weggenommen, d. h. der Werth der einen um den Werth der andern vermindert wird, welche Verminderung also (nach §. 23.) die zweite Veränderung ist, die bei Größen statt findet.

Um diese Zahlen von einander zu unterscheiden, pflegt man diejenige, welche vermindert werden soll, den Diminuend; die, so da abgezogen wird, den Diminutor; und endlich die zu bestimmende den Rest, oder die Differenz, desgleichen den Unterschied oder Ueberschuß zu nennen.

Demnach würden in den Ausdruck $8 - 3 = 5$, 8 der Diminuend, 3 der Diminutor, und 5 der Rest oder die Differenz heißen.

§. 30.

Um hier, wie bei der Addizion, gleichen Gang zu beobachten, nehmen wir die gegebenen Zahlen unter den drei angezeigten Fällen (§. 24.) welchem gemäß, um den Ausdruck $7 - 4$ nach dem ersten Fall aufzulösen, wir folgendes beobachten: man bringe den Diminutor unter den Diminuend, und ziehe unter beiden einen Strich, sodann setze man die Menge der Einheiten beider Zahlen zur Seiten, zähle die Einheiten des Diminutor von den Einheiten des Diminuenden ab, addire die übrigbleibenden zusammen, und stelle deren Summe mit Ziffern unter dem Strich, so wird diese der verlangte Rest seyn.

Dem=

Demnach setzen wir

den Diminuend	$7 = 1+1+1+1+1+1+1$
den Diminutor	$4 = 1+1+1+1$
den Rest	3

Uns zu überzeugen, daß die gefundene Zahl 3 der Rest der beiden gegebenen Zahlen 7 und 4 sey, bedarf keines weitläuftigen Beweises; denn da die gefundene Zahl anzeigen soll, um wie viel 7 größer als 4 ist, so heißt dieses eigentlich eine Zahl verlangen, die zur kleinern 4 addirt die größere 7 hervorbringt. Weil nun offenbar die kleinere Zahl so viel Einer enthält, als von der Menge der größeren sind hinweggenommen worden, so muß es einerlei seyn, ob wir den Rest, oder die übriggebliebenen Einer, zu der kleinern Zahl oder den weggenommenen Einern setzen; und weil beim letztern Verfahren die größere Zahl wiederum entstehen muß, so folgt, daß die Zahl 3 der verlangte Rest sey.

Auch bei dieser Rechnung ist einleuchtend, daß wir uns gewöhnen müssen, Zahlen von Zahlen geradezu wegnehmen zu können, ohne sie erst in ihre besondere Einheiten zu theilen, wann wir eine gewisse Fertigkeit erlangen wollen; weshalb wir bei den folgenden Beispielen ersteres immer beobachten werden.

Gesetzt, daß der Ausdruck 800 — 200 aufzulösen wäre; so setzen wir sie wieder folgendergestalt untereinander:

$$\begin{array}{r} 800 \\ 200 \\ \hline 600 \end{array}$$

und sagen: 2 von 8 läßt 6, setzen dieselbe unter die Reihe, und fügen ihr 2 Nullen an, weil Hunderte von Hunderten weggenommen, blos Hunderte zum Rest geben konnten.

Eben so würde 0,9 — 0,5 = 0,4; 0,007 — 0,006 = 0,001 und 7000 — 5000 = 2000 seyn rc. rc.

§. 31.

Sollte dem zweiten Falle gemäß, die Differenz zwischen 4 und 20 bestimmt werden, so setzen wir die kleinere Zahl unter die größere, also, daß deren bedeutende Ziffern ihre wahre Stelle einnehmen, machen unter ihnen einen Strich, und da wir finden, daß über der abzuziehenden Zahl stets eine 0 steht, von der sie nichts hinwegnehmen kann, so nimmt man eine Einheit von der links zunächst stehenden Ziffer, als 10 Einheiten dieser Stelle an, und zieht von denselben die kleinere Zahl ab; hat man hernach nichts von der nächst höhern Stelle wegzunehmen, so setzt man die daselbst um eine Einheit verminderte Zahl, neben dem gefundenen Rest.

$$\text{Also setzen wir } \begin{array}{r} \scriptstyle 10 \\ 2\dot{.}0 \\ 4 \\ \hline 16 \end{array}$$

und sagen: da 4 von 0 weggenommen nichts geben kann, so vermindern wir 20 um 10, deuten solches mit einem Punkte an, und sagen, 4 von 10 Einern, wie solches über der Null angezeigt stehet, lassen 6 zum Rest, den wir unter der Reihe der Einer stellen; ferner nichts von der um 10 verminderten 20 lassen 10 oder 1 Zehner zum Rest, welchen wir neben der 6 unter der Reihe der Zehner stellen; und so ist 16 die verlangte Differenz.

Uebrigens kann man hier den Beweis eben so wie beim vorigen §. führen, sobald man die Einer einer jeden Zahl einzeln vorstellet.

Sollten wir ferner den Ausdruck 900 — 8 auflösen, so bemerken wir sogleich, daß wir keine Zehner in der zweiten Stelle wegnehmen können, weshalb wir genöthiget sind, von den 9 Hunderten eins zu nehmen, und es uns als zehn Zehner vorzustellen; sodann aber diese zehn Zehner um einen zu vermindern, den wir, wie vorher

als zehn Einer ansehen können, durch welche Vorstellung wir also 900 als 8 Hunderte, 9 Zehner und 10 Einer zu nehmen haben, von welchen letztern allein die 8 Einer abgezogen, uns die Differenz 892 geben, wie folgende Darstellung zeiget:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 9} \\ {\scriptstyle 10\,10} \\ 900 \\ 8 \\ \hline 892 \end{array} \text{ die Differenz.}$$

Wir sehen nun leicht ein, daß, sobald die bedeutende Ziffer der größeren Zahl in einer weit höhern Stelle stünde, und mithin noch mehrere Nullen hätte, die weggenommene Einheit der bezeichneten Ziffer allen nächst niedrigen Stellen, 9 Einheiten, und derjenigen Zehne ertheile, wo der Abzug unmittelbar geschiehet; weshalb wir uns bei dergleichen Zahlen, immer in der Stelle, wo der Abzug geschiehet, zehn Einheiten vorstellen, die gegebenen Zahlen von denselben abziehen, und alle übrige Neunen, mit der um eins verminderten höchsten Ziffer zum Rest setzen.

Demnach wäre 70000—50 = 69950; 6—0,00002 = 6,0000 — 0,00002 = 5,9998; 1 — 0,0001 = 1,0000 — 0,0001 = 0,9999; 100 — 0,00001 = 99,99999 u. s. w. wo wir im letzten Beispiele auch nicht einmal 100 = 100,00000 zu setzen brauchen.

§. 32.

Hätten wir nach dem dritten Falle 364 von 697 abzuziehen, so setzen wir sie wiederum so unter einander, daß Einer unter Einer rc. zu stehen kommen, und ziehen dann nach und nach die Theile der untern Zahl, von denen über ihr stehenden ab, indem wir von der niedrigsten bis zur höchsten Stelle fortgehen; dann bestimmen die gefundenen einzelnen Reste zusammen genommen, den verlangten

Rest, welches nach allem dem, was wir bisher kennen gelernt haben, keines besondern Beweises bedarf.

Wir setzen demnach: 697
364
───
333

und sagen: 4 Einer von 7 Einern lassen 3 Einer; 6 Zehner von 9 Zehner lassen 3 Zehner, und 3 Hundert von 6 Hundert lassen 3 Hunderte, mithin ist der Rest der gegebenen Zahlen 333.

Ferner wäre 5938 von 6475 abzuziehen, so setzen wir wiederum

6475
5938
───
537

und sagen: da 8 von 5 nicht weggenommen werden kann, so nehmen wir eine Einheit von den folgenden 7 Zehnern, wie im vorigen §. welche 10 Einer sind, die zu den 5 Einern genommen, 15 Einer geben, und sprechen: 8 von 15 Einern lassen 7 Einer; weiter, 3 Zehner von 6 Zehner lassen 3 Zehner; dann 9 Hunderte von 14 Hunderte, indem wir in Gedanken von 6 Tausend, 1 Tausend für 10 Hunderte nehmen, lassen 5 Hunderte; endlich 5 Tausend von 5 Tausend weggenommen, lassen nichts zum Rest; mithin erhellet, daß 537 der verlangte Rest sey.

Auf ähnliche Art würden wir auch finden, daß 908,5 —69,7=838,8; und 400500,6—379458,734246= 400500,600000—379458,734246=21041,865754 sey, u. s. w. wenn wir bei Bestimmung des letzteren Restes Rücksicht auf die Anmerkung des vorigen §. nehmen.

§. 33.

Da wir nunmehro keinen Fall in unbenannten Zahlen gedenken können, der nicht in den gegebenen Exempeln wäre angezeigt worden, so nehmen wir jetzt Beispiele

spiele benannter Zahlen, wo wir, wie oben im 28sten §. Rücksicht auf ihre besondere Gesetze nehmen müssen.

1. Gesetzt, es bestehe eine Armee aus 90000 Mann Infanterie, 12000 Mann Dragoner, 4000 Mann Husaren, und man habe von ihr 25000 Mann Infanterie, 3400 Mann Dragoner, und 1200 Husaren abgeschickt; man will wissen, wie stark die Armee geblieben sey?

Wir setzen demnach

	90000 M. Inf.	12000 M. Drag.	4000 M. Husar.
	25000 = =	3400 = =	1200 = =
die Armee bleibt stark	65000 M. Inf.	8600 M. Drag.	2800 M. Husar.

2. Oder man habe zu Verfertigung einer gewissen Menge Patronen 1 Ballen 4 Rieß und 16 Buch Papier erhalten, von dem man nur 9 Rieß, 18 Buch und 15 Bogen nöthig habe; so wird gefragt: wie viel Papier man übrig behalte?

Demnach setzen wir	1 Ball.	4 Rieß	16 Buch	— Bog.
	— =	9 =	18 =	15 =
mithin bleiben übrig	— =	4 Rieß	17 Buch	9 Bog.

denn wir müssen sprechen, indem wir von den 16 Buch eines nehmen, welches 24 Bogen enthält: 15 Bogen von 24 Bogen lassen 9 Bogen; ferner, weil 18 Buch nicht von 15 Buch weggenommen werden können, so nehmen wir 1 Rieß, welches 20 Buch giebt, zu dem die 15 Buch gerechnet 35 geben, und sprechen 18 von 35 lassen 17 Buch u. s. w.

3. Hätte eine Kasse für eine Besatzung von 4 Regimentern folgende Gelder empfangen; nemlich für das eine 7840 Thl. 12 Gr. 3 Pf., fürs zweite 6957 Thl. 18 Gr. 4 Pf., fürs dritte 5986 Thl. 2 Gr. 9 Pf., und fürs vierte 4666 Thl. 19 Gr. 10 Pf.; aber dem ersten nur 7814 Thl. 22 Gr.; dem zweiten 6896 Thl. 23 Gr. 6 Pf.; dem dritten 5665 Thl. 10 Gr. 9 Pf., und dem vierten 4646 Thl. 4 Gr. 5 Pf. zu zahlen gehabt; wie viel Geld muß die Kasse zurück behalten?

Hier muß nun offenbar erst die Summe der Einnahme und der Ausgabe bestimmt, und dann diese von jener abgezogen werden. Wir setzen demnach:

Einnahme.				Ausgabe.			
7840 thl.	12 gr.	3 pf.		7814 thl.	22 gr.	-- pf.	
6957 =	18 =	4 =		6896 =	23 =	6 =	
5986 =	2 =	9 =		5665 =	10 =	9 =	
4666 =	19 =	10 =		4646 =	4 =	5 =	
25451 thl.	5 gr.	2 pf.	Summe	25023 thl.	12 gr.	8 pf.	Summe
25023 =	12 =	8 =					
427 thl.	16 gr.	6 pf.	bleibt rückständig.				

§. 34.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir noch die Eigenschaften zweier Zahlen **in Rücksicht auf die Summe und die Differenz** von ihrer Summe und ihrer Differenz kennen lernen, **um jede der erstern aus letztern geradezu bestimmen zu können.**

Gedenken wir uns demnach zwei Zahlen, und setzen sie zusammen, so muß die dadurch entstehende Summe die Differenz beider Zahlen einmal, und die kleinere dagegen doppelt enthalten, weil die größere aus der kleinern und der Differenz bestehet. Setzen wir nun zu dieser Summe noch die Differenz, so erhalten wir die Summe von der Summe und der Differenz beider Zahlen, und sie muß die kleinere Zahl wie die Differenz doppelt enthalten. Es giebt aber die kleinere mit der Differenz zusammen genommen die größere Zahl; folglich ist diese größere Zahl in der Summe von der Summe und der Differenz beider Zahlen doppelt enthalten, und es erhellet:

a. **Daß von zweien Zahlen die größere ihrer halben Summe und halben Differenz zusammen genommen gleich sey.**

Nehmen wir hingegen von der Summe beider Zahlen ihre Differenz hinweg, d. h. bestimmen wir die Differenz zwischen der Summe und der Differenz beider Zahlen; so muß diese die kleinere Zahl doppelt enthalten, weil die Summe der beiden Zahlen diese kleinere Zahl doppelt

doppelt, aber die Differenz nur einmal enthält; mithin folgt:

b. Daß von zweien Zahlen die kleinere ihrer halben Summe weniger ihrer halben Differenz gleich sey.

Wir können also nach diesen beiden Sätzen (und in der Voraussetzung, daß man durch vorige Rechnungen die Fertigkeit erworben habe, sogleich entscheiden zu können, welche Zahlen doppelt so groß sind als 2, 3, 4, 5) aus der gegebenen Summe und der Differenz zweier Zahlen, diese Zahlen selbst auf zweierlei Art bestimmen.

Wäre z. B. 10 die Summe und 6 die Differenz zweier Zahlen, welche man zu bestimmen verlangte, so setzten wir (nach a)

Von 10 ist 5 halb so groß
= 6 = 3 = =

mithin ist 8 die größere Zahl, und folglich 10 — 8 = 2 die kleinere.

Oder auch (nach b) von 10 ist 5 halb so groß
von 6 = 3 = =

mithin 4 — 2 = 2 die kleinere, und
folglich 10 — 2 = 8 die größere.

Oder wollte man wissen, wie stark von zweien Armeen jede besonders sey, von denen man sagte: die eine habe 5000 Mann Kavallerie mehr als die andere; da aber beide vereiniget waren, so formirten sie eine Armee von 230000 Mann? so setzen wir.

von 230000 ist 115000 halb so groß
= 5000 = 2500 =

mithin hat die größere 115000 + 2500 = 117500 M. }
und die kleinere 115000 — 2500 = 112500 = } 230000 M.

Ferner: hätten zwei Regimenter 140 Rekruten empfangen, und man verlangt zu wissen, wie viele jedes Regiment bekommen, wüßte aber sich nur zu erinnern, daß das eine 12 mehr als das andere erhalten hätte?

Hiernach können wir setzen:

da von 140 die 70 halb so groß
und von 12 ⸗ 6 ⸗ ⸗

so hat das eine 76 Rekruten
und das andere $140 - 76 = 64$ empfangen.

Offenbar würden hier mehrere dergleichen Beispiele überflüßig seyn, weshalb wir uns mit ihnen nicht aufhalten dürfen.

§. 35.

Zu gegenwärtiger und voriger Rechnungsart können wir nun noch folgende Grundsätze annehmen, und sie mit den andern (§. 21.) vereinigen.

f. Wenn gleichen Größen gleiche Größen zugesetzt, oder weggenommen werden, so entstehen widerum gleiche Größen.

Weil also $17 + 4 = 15 + 6$
und $9 + 3 = 10 + 2$

so muß auch $26 + 7 = 25 + 8 = 33$ seyn.

Oder, da $17 + 4 = 15 + 6$
$9 + 3 = 10 + 2$

so muß $8 + 1 = 5 + 4 = 9$ seyn.

g. Hingegen, wenn gleichen Größen ungleiche Größen zugesetzt, oder hinweggenommen werden, und so umgekehrt; so entstehen ungleiche Größen.

Demnach, weil $12 = 12$
$6 > 4$

so ist $18 > 16$

Und umgekehrt, da $18 > 12$
$9 = 9$

so ist $27 > 21$

Oder da $12 = 12$
$6 > 4$

so ist $6 < 8$

Oder da $18 > 12$
$9 = 9$

so ist $9 > 3$

§. 36.

Das es bei aller erworbenen Fertigkeit, die Zahlen zu addiren und zu subtrahiren, leicht geschehen kann, daß doch Fehler in die Rechnungen kommen, wodurch die verlangte Größen nicht erhalten werden; so hat man

darauf

darauf gedacht, wie dieselben sogleich entdeckt, und weggeschafft werden können, welches demnach wiederum eine Rechnung zur Berichtigung schon geführter Rechnungen erfordert, die darum deren Probe genannt wird, welche die folgende Regeln bei addirten und subtrahirten Zahlen angeben.

a. Will man untersuchen, ob eine Summe gegebener Zahlen richtig sey, so addire man diese von neuem in umgekehrter Ordnung, und ziehe jede einzelne Summe von der unter ihrer Reihe in der gefundenen Summe stehenden Zahl ab; bleibt dann nach dem Abzuge aller einzelnen Summen kein Rest, so ist die vorhergeführte Rechnung richtig.

Demnach muß nachstehende Rechnung ihre Richtigkeit haben:

965
832
498
2295
11

Denn 9 Hunderte und 8 geben 17 und 4 geben 21 Hunderte, die von den unter ihnen in der Summe befindlichen 22 Hunderten 1 oder 10 Zehner zum Rest lassen; ferner geben 6 Zehner und 3 offenbar 9, und 9 geben 18 Zehner, die von 19 weggenommen, (wo wir das vorher gebliebene 1 Hundert mit rechnen müssen,) noch 1 Zehner übrig lassen; und endlich 5 und 2 geben 7, und 8 geben 15, die von 15 weggenommen, keinen Rest geben.

b. Will man erfahren, ob ein Rest zweier Zahlen richtig sey, so darf man nur denselben zur kleinern Zahl addiren; giebt die Summe die größere Zahl, so hat die Rechnung ihre Richtigkeit, dem 30ten §. gemäß; oder nimmt man den Rest von der größeren Zahl hinweg, so muß dann die kleinere Zahl übrig bleiben.

Demnach ist die Rechnung folgender beiden Zahlen richtig: nemlich

	780,532	
weniger	64,987	
giebt	715,545	
wozu wieder	64,987	addirt
die Summe	780,532	oder die größre Zahl giebt.
von der auch	715,545	weggenommen
die kleinere Zahl	64,987	hervorbringt.

Dritte Rechnungsart.

Von Vervielfältigung der Zahlen, oder der Multiplikation.

§. 37.

Multipliziren heißt eine Zahl finden, welche die eine gegebene so oft enthält, als die andere die Einheit.

Dieser gegebenen Erklärung zufolge, wird offenbar von zwei gegebenen Zahlen gesprochen, aus denen eine dritte bestimmt werden soll; um also dieselben von einander zu unterscheiden, wollen wir die zu bestimmende Zahl das Produkt, die eine gegebene, welche in voriger bestimmte mal enthalten seyn soll, den Multiplikand; und die andere, welche die Einheit eben so oft enthält, den Multiplikator nennen; folglich muß das Produkt den Multiplikand so oft, als der Multiplikator die Einheit enthalten. Oft pflegt man auch die gegebenen Zahlen Faktores, und das Produkt alsdann das Faktum zu nennen.

Wäre demnach uns der Ausdruck $4 \cdot 3 = 4 \times 3$ (nach §. 22.) gegeben, so würden wir 4 den Multiplikand, 3 den Multiplikator, und 12 das Produkt; schlechthin 4 und 3 die Faktores und 12 deren Faktum nennen.

§. 38.

§. 38.

Denken wir der gegebenen Erklärung weiter nach; so wird uns einleuchtend, daß nur diejenige Zahl ein Produkt seyn kann, welche genau so aus dem Multiplikand, wie der Multiplikator aus der Einheit entstehet; in welcher richtigen Bemerkung wir also das Mittel erkennen, wie wir das Produkt zweier Zahlen bestimmen können: denn wären es die obigen ganzen Zahlen 4 und 3, so dürfen wir nur den Multiplikand 4 dreimal unter einander setzen, und deren Summe suchen, weil der Multiplikator 3, ebenfalls aus drei Einern zusammen gesetzt worden ist; mithin folgt, weil:

$$\begin{array}{r} 4 \\ +4 \\ +4 \\ \hline \end{array}$$

die Summe 12 giebt, daß diese 12 das verlangte Produkt der Zahlen 4 und 3 ist, welches die nach der Erklärung angegebene Eigenschaft hat, und der obigen allgemeinen Erklärung (§. 23.) völlig entspricht: denn man siehet hieraus, daß die Multiplikation nichts anders, als eine Addizion gleicher Zahlen ist, und zur ersten Hauptveränderung, nemlich zur Vermehrung der Größen, gehöret.

Sollten wir ferner das Produkt von 60 . 7 machen, so würden wir sprechen: da $60 + 60 + 60 + 60 + 60 + 60 + 60 = 420$ ist, so muß das verlangte Produkt 420 seyn, weil ebenfalls $7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ist.

Oder wäre das Produkt von 8 . 0,4 zu bestimmen, so würden wir sagen: $0{,}8 + 0{,}8 + 0{,}8 + 0{,}8 = 3{,}2$ muß das verlangte Produkt seyn: denn der Multiplikator 0,4 ist aus 1 entstanden, indem man diese 1 zehnmal kleiner machte, wodurch man 0,1 erhielt, und diese Größe viermal nahm, also mußte auch der Multiplikand 8 zehnmal kleiner gemacht, und viermal genommen werden, wie wirklich geschehen ist.

Und

Und so ist nun leicht einzusehen, wie auf diese Art in allen möglichen Fällen das Produkt bestimmt werden könne.

§. 39.

Da uns keine Bedingung gemacht wurde, welche von den gegebenen Zahlen als Multiplikand genommen werden müßte; so haben wir die Wahl, welche von ihnen wir dafür annehmen wollen; also daß wir in den vorigen Beispielen auch die Zahlen 3, oder 7, oder 0,4 statt 4, oder 60, oder 8 zu Multiplikanden nehmen könnten: welchem gemäß z. E. 4 mit 3, wie 3 mit 4 multiplizirt, ein und dasselbe Produkt hervorbringen muß, welches auch wirklich geschiehet. Denn da 3 mal 4 nichts anders ist, als 1 mal 4 dreimal genommen, und 4 mal 3 nichts anders, als 4 mal 1 dreimal genommen; so folgt, weil 1 mal 4, so viel als 4 mal 1 ist, daß in beiden Fällen gleichviel, d. i. gleiche Produkte entstehen. Und da diese richtige Schlußart bei allen andern Fällen angewandt werden kann, so könnte man auch ihr gemäß obige Erklärung §. 37. dahin verändern, daß man das, was man dem Multiplikator zueignete, dem Multiplikand ertheilete; und so umgekehrt.

§. 40.

Nach dieser über die Faktores und das Produkt richtigen Betrachtung kehren wir nun zurück, und bemerken, daß wir genöthiget seyn würden, eine weitläuftige und mühsame Rechnung zu machen, wenn wir die Produkte aller möglichen Zahlen, auf obige Art (§. 38.) bestimmen sollten; welches uns schon das zweite Beispiel begreiflich machet, sobald wir die Zahl 60 als Multiplikator zu nehmen gezwungen wären, unter welcher Bedingung offenbar die Zahl 4 nicht weniger als 60 mal zu sich selbst addirt werden müßte. Dergleichen und noch größere Produkte auf einem kürzern Wege zu erhalten, mußte man also bedacht seyn; und weil die Kenntniß aller Pro-

dukte derjenigen Zahlen, welche bloß Einer enthalten, ohne Zweifel dahin leitet; so verfertigte man von ihnen nachstehende Tabelle dergestalt, daß alle in der ersten Reihe stehende Zahlen, 2, 3, 4 ꝛc. 9 zu sich selbst addirt, und unter einander gesetzt werden.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

In dieser Tabelle, welche nach ihrem Erfinder Pythagoras, die Pythagorische Tabelle genannt wird, finden wir demnach wirklich alle Produkte, welche gegebene Zahlen der Einer immer geben können. So finden wir in ihrer ersten Reihe die Zahlen in ihrer natürlichen Folge gestellt, und in den nachfolgenden die Produkte, wenn die obern mit 2, 3, 4 ꝛc. multiplizirt werden, welches sogleich an der Ziffer erkannt wird, mit der jede dieser Reihen anfängt. Indessen bleibt es sehr rathsam, sich diese Produkte so eigen zu machen, daß man beim Multipliziren zweier Zahlen nicht nöthig hat, sie hier aufzusuchen.

§. 41.

Um so fort die Anwendung der in dieser Tabelle befindlichen Produkte beim Multipliziren aller möglichen

Zahlen

Zahlen zu zeigen, wollen wir diese unter folgende drei Fälle nehmen.

a. Mag jede der gegebenen Zahlen eine bedeutende Ziffer haben;

b. mag die eine gegebene Zahl mehr bedeutende Ziffern haben, indeß die andere nur eine hat; und

c. mögen beide jede beliebige Menge bedeutende Ziffern haben.

Dem ersten Falle gemäß verlange man nun den Ausdruck 5.7 aufzulösen.

Solches zu bestimmen, setzen wir beide Ziffern untereinander, und ziehen unter selbige einen Strich: sodann suchen wir den Multiplikand 7 in der ersten Reihe, und rücken gerade herunter in die 5te Reihe, welches linker Hand ihre erste Ziffer anzeigt; so finden wir da, wo wir stehen bleiben, die Zahl 35 zum verlangten Produkt, was wir endlich unter den gezogenen Strich bringen.

Demnach setzen wie den Multiplikand	7
den Multiplikator	5
das Produkt =	35

Uns aber zu überzeugen, daß 35 das wahre Produkt von 5 mal 7 sey, bedarf es nur der Erinnerung, daß der Multiplikator 5, als die erste Zahl der gesuchten Reihe, genau so aus der ihr überstehenden 1 entstanden ist, wie das Produkt 35 aus der über ihr stehenden 7, nach vorigem §, welche Eigenschaften diese Zahlen nach der Erklärung (§. 37) haben sollten.

Es ist eben nicht nothwendig, daß wir die Zahlen auf vorige Art anstellen; sondern es kann auch noch folgendermaßen geschehen, je nachdem man für gut findet; nemlich

5)$\frac{7}{35}$, oder $\frac{7}{35}$(5.

Sollten

Sollten wir ferner den Ausdruck 7.50 auflösen, und nehmen an, daß wir die Produkte der Tabelle bereits uns eigen gemacht hätten; so würden wir setzen:

70
――(5
350

und sprechen: 5 mal 7 giebt 35, und diesem Produkte eine Null anhängen, wodurch 350 zum wahren Produkt der gegebenen Zahl 50.7 entstehet. Denn da wir nicht 7, sondern 70 mit 5 zu multipliziren hatten, und 7 Zehner zehnmal so groß als 7 Einer sind; so ist offenbar, daß auch das Produkt 5.70 = 350 zehnmal größer als 35 seyn müsse.

Aus gleichem Grunde erhellet, daß 900.4 = 3600 sey; und weil uns frei stehet, welche Zahl zum Multiplikator gemacht werde (§. 39.); so folgt, daß 5.3000 = 15000; 7.6000 = 42000 rc. rc. ist.

Wäre der Ausdruck 70.30 = 70 × 30 aufzulösen; so würden wir setzen:

70
――(30
2100

und sagen: 3 mal 7 Zehner, geben 21 Zehner, oder 210; da aber nicht mit 3, sondern mit der zehnmal größern Zahl 30 zu multipliziren ist; so folgt, daß auch das Produkt 210 zehnmal so groß, und mithin in 2100 verwandelt werden muß, wie solches bereits vorgestellet ist.

Und eben so folgt, daß 800.40 = 32000; 9000.700 = 6300000 rc. rc. sey.

Nehmen wir nunmehro zehntheilige Zahlen, daß also gefragt würde: was ist das Produkt der Zahlen 8.0,3? so setzen wir

8
――(0,3
2,4

und sagen: 3 mal 8 giebt 24, und schneiden eine zehntheilige Stelle von der Rechten zur Linken ab, wodurch 2,4 entste-

entstehet, welches das wahre Produkt der gegebenen Zahlen ist.

Uns hiervon zu überzeugen, dürfen wir nur untersuchen, ob das Produkt genau so aus dem Multiplikand, wie der Multiplikator aus der Einheit entstehet. Nun ist offenbar, daß der Multiplikator 0,3 aus 1 entstehet, wenn man 1 zehnmal kleiner macht, und das entstehende 0,1 dreimal nimmt; machen wir aber auch den Multiplikand 8 zehnmal kleiner, so enstehet 0,8, und es erhellet folglich, daß 0,8 + 0,8 + 0,8 = 2,4 ist.

Geradezu aber könnte man auch sagen: weil 8 . 3 = 24, und 3 zehnmal so groß als 0,3 ist, so muß das Produkt 24 zehnmal zu groß seyn, folglich zehnmal kleiner gemacht werden, und mithin muß wiederum 8 . 0,3 = 2,4 seyn.

Auf gleiche Art erhellet auch, daß 7 . 0,06 = 0,42; 9 . 0,0005 = 0,0045; wie auch umgekehrt (nach §. 39.) daß 0,6 . 8 = 4,8; 0,0003 . 4 = 0,0012 ꝛc. ist.

Ferner werde gefragt: was ist das Produkt von 0,2 . 0,8? so setzen wir wie bisher

$$\frac{0,2}{0,16}(0,5$$

und sagen: 8 mal 0,2 geben 1,6, da aber nicht mit 8, sondern mit der zehnmal kleinern Zahl 0,8 ist multipliziret worden; so folgt, daß auch das Produkt 1,6 zehnmahl kleiner, mithin 0,16 werden müsse.

So ist auch klar: daß 0,7 . 0,02 = 0,014; 0,09 . 0,03 = 0,0027; 0,006 . 0,04 = 0,00024 ꝛc. ist.

Gönnen wir nun allen bisherigen Beispielen, sowohl bei den ganzen als zehntheiligen Zahlen, unsere Aufmerksamkeit, und vergleichen bei ersteren die Menge der Nullen ihrer Faktoren mit der Menge, die in ihren Produkten angetroffen wird; und thun eben dieses bei letzteren in Ansehung der zehntheiligen Stellen, so finden wir in beiden Fällen bei den Faktoren, wie bei den Produkten eine gleiche

Menge

Menge, daher wir für dieselben folgende allgemeine Regeln festsetzen können:

1. Sind ganze mit Nullen endigende Zahlen gegeben; so multiplizire man sie, wie bisher, ineinander, und gebe dem Produkte eben so viele Nullen, als beide Faktores zusammen genommen haben.

2. Hat man mit zehntheiligen Zahlen zu multipliziren; so verfahre man mit ihnen, wie mit den ganzen Zahlen, und gebe dem entstehenden Produkte so viel zehntheilige Stellen, als in den Faktoren angetroffen werden.

Vornemlich sind hier die Produkte zu bemerken, wo Zehner mit Zehntheilen, Hunderte mit Hunderttheilen ꝛc. ꝛc. und so umgekehrt, multiplizirt werden, wo immer eine Zahl der Einer entstehen muß, weil die eine Zahl genau um so vielmal so groß, als die andere zu klein ist; demnach ist 50 . 0,6 = 30,0 = 30; 800 . 0,06 = 48,00 = 48 ꝛc. 0,009 . 8000 = 72,000 = 72 u. s. w. wo von den ganzen Zahlen, die Menge der Nullen, der Menge der zehntheiligen Stellen gleich ist.

Uebrigens dürfen wir uns auch nicht befremden lassen, daß in den Produkten von ganzen und zehntheiligen Zahlen, oder von zehntheiligen Zahlen allein, Größen kleinern Werthes entstehen, als einer, oder sogar jeder der Faktoren hat. Denn es ist klar, daß in diesen Fällen ein oder jeder Faktor kleiner als 1, und mithin ein Theil von 1 ist, wenn man ihm auch noch so viel bedeutende Ziffern geben wollte; folglich kann den Begriffen der Multiplikazion gemäß (§. 38.) nur ein gewisser Theil des Multiplikanden gefunden werden, der nothwendig kleiner als derselbe, oder als der Multiplikator, oder als beide werden muß.

Und nun gehen wir zum zweiten Fall, wo die eben angezeigten Regeln, wie auch beim dritten Fall, anzuwenden sind.

§. 42.

Es werde gefragt: wieviel giebt 35 mit 7 multiplizirt? so setzen wir entweder

1) 35	oder 2) 35	oder 3) 35(7
7	7	$245 = 35 \cdot 7$
$35 = 5 \cdot 7$	$35 = 5 \cdot 7$	
$210 = 30 \cdot 7$	$21 = 30 \cdot 7$	
$245 = 5 \cdot 7 + 30 \cdot 7$	$245 = (30 + 5) \cdot 7$	

und sprechen, indem wir von der niedrigsten Stelle anfangen: 7 mal 5 giebt 35, welches Produkt hingesetzt wird; ferner 7 mal 30 giebt 210, oder 21 Zehner, welche ebenfalls nach ihrem Werthe unter die 35 gestellt werden. Addiren wir hierauf beide Produkte, so erhalten wir 245, welche Zahl nach obigen Gründen (§. 39.) aus 35 so entstanden ist, als 7 aus 1: denn 35 enthält 5 siebenmal, und 21 Zehner eben so oft die 3 Zehner; mithin auch 35 + 210, oder 245, die 30 + 5 oder 35 siebenmal.

Hier ist zu bemerken, daß von den 3 Vorstellungen die zweite, wo das einzelne Produkt der Zehner unter 35 seine eigenthümliche Stelle einnimmt, bei größern gegebenen Zahlen die gewöhnlichste ist; daß aber nach der dritten dieses Produkt am geschwindesten bestimmt wird, wenn man, sobald das Produkt aus 7 mal 5, d. i. 35 gefunden, die 5 Einer allein hinsetzt, und die 3 Zehner im Sinn behält, und spricht: 7 mal 3 Zehner geben 21 zu denen vorige 3 Zehner genommen, 24 Zehner bestimmen, die man auch nach ihrem Werthe den 5 Einern zur linken Hand setzet. Und hätten wir noch Hunderte zu multipliziren, so würden wir die gefundenen 2 Hunderte ebenfalls nicht hingesetzt, sondern zum Produkt der Hunderte aufbewahrt haben.

Ferner

Ferner ersehen wir aus denen, jedem einzelnen, und dem gefundenen Produkte, zur Seite gesetzten Faktoren, daß das Produkt zweier Zahlen aus der Summe der einzelnen Produkte bestehe, die von den Theilen des Multiplikanden in dem Multiplikator bestimmt werden, nach welcher Bemerkung also ein Produkt solcher Zahlen dreierlei Vorstellungen leidet; nemlich es muß

$35 \cdot 7 = (30 + 7) \cdot 7 = 30 \cdot 7 + 5 \cdot 7 = 245$ seyn.

Und betrachten wir endlich die Theile des Multiplikanden 30 und 5, als besonders gegebene Zahlen, die mit einer und eben derselben Zahl 7 multiplizirt, und die daraus entstehenden Produkte summiret werden sollten; so sehen wir, daß es völlig einerlei ist, ob man diese Angabe buchstäblich befolgt, oder die Summe der beiden verschiedenen Faktoren 30 und 5 mit ihrem gemeinschaftlichen Faktor 7 multipliziret.

Wenn wir eben so bei folgenden Beispielen verfahren, und immer bei den Produkten Rücksicht auf die erwiesenen Regeln nehmen; so erhellet, daß

$356 \cdot 4 = 1424$; $50380 \cdot 9 = 453420$; $5809000 \cdot 6 = 34854000$; $603000 \cdot 40 = 24120000$; $8640 \cdot 2000 = 17280000$; $5000 \cdot 3200 = 16000000$ ꝛc.

§. 43.

Da es nun nicht mehr Schwierigkeit haben kann, die Produkte ähnlicher Zahlen zu bestimmen, so nehmen wir noch die Zahlen des dritten Falles vor.

Wäre demnach die Frage: wie groß ist das Produkt der Zahlen 75 und 53? oder was giebt $75 \cdot 53$? so setzen wir:

$$
\begin{array}{l}
75 \\
\underline{53} \\
375 = 75 \cdot 50 \quad = 70 \cdot 50 + 5 \cdot 50 \\
\underline{225 = 75 \cdot 3 \quad\;\; = 70 \cdot 3 + 5 \cdot 3} \\
3975 = 75 \cdot (50 + 3) = (70 + 5) \cdot (50 + 3) = 75 \cdot 53
\end{array}
$$

 und

und sprechen, von der höchsten Stelle des Multiplikators anfangend: 50 mal 5 giebt 25 Zehner, setzen die 5 in die Stelle der Zehner, und behalten die zwei Einheiten der nächst höhern Stelle, oder die 2 Hunderte im Sinn; weiter: 50 mal 7 Zehner geben 35 Hunderte, wozu die vorigen 2 genommen, 37 Hunderte bestimmen; und so enthält das erste Produkt 375 Zehner, welche auch in ihrer eigenthümlichen Stelle stehen. Ferner sprechen wir: 3 mal 5 geben 15, oder 5 Einer und 1 Zehner, setzen demnach die 5 Einer eine Stelle weiter zur Rechten, und behalten 1 Zehner im Sinn; und endlich 3 mal 7 Zehner geben 21, und der vorige Zehner 22 Zehner, die wir in die ihren zukommende Stelle bringen, und nun beide gefundene Produkte zusammen setzen, woraus die Summe 3975 entspringet, die das verlangte Produkt beider gegebenen Zahlen ist.

Wie wir sehen, so haben wir bei Behandlung dieser Zahlen nichts anders zu thun, als die Rechnungen des zweiten Falles so oft zu wiederholen, als der Multiplikator bedeutende Ziffern hat; und weil wir von daher überzeugt sind, daß jedes gefundene einzelne Produkt seine Richtigkeit hat, so braucht man, wie in diesen und nächststehenden Beispielen keinen nähern Beweis über die entstandenen Produkte zu führen.

Uebrigens bemerken wir auch, daß es gewöhnlicher ist, diese Rechnungen mit der, in der niedrigsten Stelle des Multiplikators befindlichen Ziffer anzufangen, wodurch ein gleicher Werth im Produkt erhalten wird; weil wir aber auf unsere Art nicht allein erkennen können, was für Einheiten des höchsten Werthes, sondern auch sogleich bei zehntheiligen Zahlen, welche Menge zehntheilige Stellen die einzelnen Produkte, wie deren Summe, erhalten müssen, wenn wir die Anmerkung des 41 §. befolgen; so haben wir diese Art, das Produkt zu bestimmen, der gewöhnlichen vorgezogen.

Und

Und endlich erhellet aus denen den einzelnen Produkten zur Seite gesetzten Faktoren: daß das Produkt zweier Zahlen stets aus den einzelnen Produkten der Theile des Multiplikanden in den Theilen des Multiplikators zusammengesetzt sey, welchem gemäß das Produkt solcher mehrtheiligen Zahlen folgendermaßen vorgestellet werden kann; nemlich:

$75 \cdot 53 = (70 + 5) \cdot (50 + 3) = 70 \cdot 50 + 5 \cdot 50 + 70 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 3975.$

Wäre ferner 78400 . 36 aufzulösen, so setzen wir:

$$\begin{array}{l} 78400 \\ \underline{\quad 36} \\ 2352\ldots = 78400 \cdot 30 \\ \underline{\;4704\ldots = 78400 \cdot \;\,6} \\ 2822400 = 78400 \cdot (30 + 6) = 78400 \cdot 36 \end{array}$$

In diesem Beispiele nehmen wir also bei der Bestimmung des Produktes auf die erste Regel des 41 §. Rücksicht, welcher gemäß auch

$54900 \cdot 2700 = 148230000$; $58000 \cdot 76000 = 4408000000$; $324000 . 2230000 = 722520000000$ ist, u. s. w.

Sollte hingegen 83 . 4,5 gegeben werden, so setzen wir:

$$\begin{array}{r} 83 \\ \underline{4{,}5} \\ 332 \;\; = 83 \cdot 4 \\ \underline{41{,}5 = 83 \cdot 0{,}5} \\ 373{,}5 = 83 \cdot 4{,}5 \end{array}$$

Oder wäre 42,026 . 4202 gegeben, so setzt man:

$$\begin{array}{r} 42{,}026 \\ \underline{4202} \\ 168104\ldots = 42{,}026 \cdot 4000 \\ 8405{,}2\ldots = 42{,}026 \cdot \;\;200 \\ \underline{84{,}052 = 42{,}026 \cdot \qquad 2} \\ 176593{,}252 = 42{,}026 \cdot 4202 \end{array}$$

Hier vergleichen wir sogleich die Ziffern des höchsten Werths vom Multiplikator mit der Ziffer des kleinsten Werths vom Multiplikanden, und finden, daß 4000 eben so viel Nullen als 0,006 zehntheilige Stellen hat, weshalb die erste Ziffer zur Rechten von dem ersten einzelnen Produkt in der Stelle der Einer, zufolge der Anmerkung des §. 41. stehen muß. Auch mußten wir das letzte einzelne Produkt, von 42,026.2 nicht um eine, sondern um zwei Stellen niedriger setzen, weil unmittelbar vor der Ziffer 2 im Multiplikator eine Null befindlich ist, deren Stelle sie sonst, und mithin das von ihr bestimmte Produkt einen zehnmal größern Werth hätte haben müssen.

Eben so würde auch

```
 543,28
   8,097
─────────
4346,24    = 543,28 . 8
  48,8952  = 543,28 . 0,09
   3,80296 = 543,28 . 0,007
──────────────────────────
4398,93816 = 543,28 . 8,097.
```

Nach gleicher Beurtheilung folgt endlich ebenfalls, daß 0,4376 . 0,028 = 0,0122528; 7,0084 . 0,0953 = 0,66790052 ist, u. s. w.

§. 44.

Da wir nun alle mögliche abstrakte Zahlen ineinander multipliziren können, so wollen wir noch einige Betrachtungen über die Zahlen-Produkte anstellen, aus welchen noch mehrere Eigenschaften hergeleitet werden. Wir bemerken also

a. Daß die Produkte von 2 in jeder beliebigen Zahl stets in ihrer niedrigsten Stelle mit den Ziffern 2, 4, 6, 8 und 0 endigen; so ist z. E. 2.2 = 4; 2.3 = 6; 2.4 = 8; 2.5 = 10; 2.6 = 12 u. s. f. oder 4.2 = 8; 4.3 = 12; 4.4 = 16; rc. oder 6.2 = 12; 6.3 = 18; 6.4 = 24 u. s. w. woraus

wir folgern, daß eine jede Zahl, deren Endungs-Ziffer 2, 4, 6, 8 oder 0 ist, jederzeit die 2 genau enthalten müsse.

b. Betrachten wir ferner die Produkte jeder beliebigen Zahl in 3, oder 6, oder 9, wie 3 . 2 = 6; 3 . 3 = 9; 3 . 4 = 12; 3 . 5 = 15; 3 . 10 = 30; 3 . 11 = 33 ꝛc. ꝛc.; oder 6 . 12 = 72; 6 . 13 = 78 ꝛc. ꝛc.; oder 9 . 5 = 45; 9 . 14 = 126 ꝛc. ꝛc. so finden wir zwar nicht, daß sämtliche Produkte mit einer der Ziffern 2, 4, 6, 8 und 0 endigen, da hingegen, daß ihre Ziffern zusammen addirt, die Zahlen 3, 6 und 9, oder sonst eine andere angeben, deren Ziffern wieder zusammen addirt, doch diese gedachte Zahlen geben. So geben von vorgefundenen Produkten die Ziffern 1 + 2 = 3 von 12; 1 + 5 = 6 von 15; 3 + 0 = 3 von 30; 3 + 3 = 6 von 33; 7 + 2 = 9 von 72; 7 + 8 = 15 von 78; und 1 + 5 = 6 von der gefundenen 15 u. s. w. woraus wiederum folgt: sind Zahlen so beschaffen, daß die Summe ihrer Ziffern eine der Zahlen 3, 6 oder 9 oder irgend eine andere, wovon die Summe ihrer Ziffern eine derselben angiebt, so ist ebendieselbe genau in ihnen enthalten.

c. Betrachten wir die Produkte von 5 in jeder beliebigen Zahl, wie 5 . 2 = 10; 5 . 3 = 15; 5 . 4 = 20; 5 . 5 = 25; u. s. w. so sehen wir, daß deren Endungs-Ziffern entweder 5 oder 0 seyn müssen, weshalb wir schließen können; eine mit 5 oder 0 endigende Zahl muß 5 genau enthalten.

d. Nehmen wir endlich noch die Produkte aus 11 in jeder beliebigen Zahl, wie 11 . 2 = 22; 11 . 3 = 33; 11 . 11 = 121; 11 . 12 = 132 ꝛc. 11 . 19 = 209; 11 . 28 = 308; 11 . 29 = 319 ꝛc. so sehen wir an den Endungs-Ziffern kein Kennzeichen, was uns erwarten ließe, daß diese Zahlen die 11 genau enthalten; allein vergleichen wir die Summe der Ziffern von den ungeraden Stellen mit der, von den geraden Stellen, so finden wir, daß dieselben von einander abge-

zogen, entweder 0, oder 11 zum Rest lassen: denn so giebt $2-2=0$ von 22 ꝛc. $(1+1)-2=0$ von 121; $(1+2)-3=0$ von 132 ꝛc. $(2+9)-0=11$ von 209; $(3+9)-1=11$ von 319 u. s. w. weshalb wir schließen: sind Zahlen der Art, daß die Differenz, von der Summe der Ziffern der geraden und der ungeraden Stellen, entweder 0 oder 11 ist, so müssen dieselben die Zahl 11 genau enthalten.

Außer diesen vier allgemeinen, bei Zahlen statt findenden und leicht zu entdeckenden Eigenschaften, lassen sich nicht mehrere angeben, daher dieselben wohl behalten und angewandt werden können.

§. 45.

Ferner bemerken wir, daß in der pythagorischen Tabelle nicht alle Zahlen anzutreffen sind, die von 1 bis 81 gezählt werden können, von welchen sowohl die fehlenden 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 51, 53, 57, 59, 61, 65, 67, 71, 73, 79 als die vorhandenen 2, 3, 5 und 7 die Eigenschaft haben, daß man keine von ihnen als ein Produkt irgend zweier Zahlen nehmen kann, man müßte denn 1, und sie selbst als Faktores betrachten wollen.

Und weil eben diese Eigenschaft noch weit mehrerern Zahlen zukömmt, welche die Zahl 81 übersteigen, wie z. E. 91, 97, 101 u. s. w. so wollen wir sie sämtlich einfache Zahlen, oder Primzahlen nennen.

Da aber im Gegentheil alle andere Zahlen, als Produkte genommen, ihre Entstehung den einfachen Zahlen zu verdanken haben, so mögen dieselben, wegen ihrer entgegengesetzten eigenthümlichen Eigenschaft, zusammen gesetzte Zahlen heißen.

Zu diesen gehören also offenbar 4, die aus 2.2 entstehet; 6 weil $3.2=6$; 8 weil $4.2=2.2.2=8$; 12 weil $3.4=3.2.2=12$ u. s. w. eben so 77, weil $11.7=77$; 78 weil $78=39.2=13.3.2$; 102 weil $51.2=102$ u. s. w.

Auch

Auch ist es gebräuchlich, daß man die Zahlen, die mit diesen Ziffern 2, 4, 6, 8 oder 0 endigen, gerade Zahlen, und alle andern ungerade Zahlen nennet.

§. 46.

Endlich, vergleichen wir den Werth der Produkte mit dem Werthe der Faktoren in sämtlichen Beispielen, so müssen wir noch diese Wahrheit erkennen: **ein jedes Produkt wird genau um so vielmal vergrößert, oder verkleinert, als man bei unverändertem Multiplikand den Multiplikator, oder bei unverändertem Multiplikator den Multiplikand größer oder kleiner nimmt.** So z. E. ist erwiesen (§. 30.) daß 4 . 3 = 3 . 4 = 12; nehmen wir nun einen der Faktoren zehnmal größer, so muß das vorgefundene Produkt 12 selbst um gleich vielmal größer werden, weil das entstehende Produkt den zehnmal größern Faktor, eben so oft, als das vorige Produkt den unveränderten Faktor enthalten muß; mithin ist 40 . 3 = 4 . 30 = 120. Aus ähnlichem Grunde folgt, daß das Produkt 0,4 . 3 = 4 . 0,3 = 1,2 zehnmal kleiner, als das Produkt 4 . 3 = 3 . 4 = 12 sey u. s. w.

Eben so ist offenbar, daß das Produkt 3 . 4 = 4 . 3 = 12 auch 2, 3, 4 rc. mal größer werden müsse, wenn man den einen Faktor 2, 3, 4 rc. mal größer machte, d. h. mit 2, 3, 4 rc. zuvor multiplizirte, und aus der entstandenen Zahl und dem andern Faktor ein Produkt bestimmte. So wäre das Produkt (2 . 3) . 4 = 6 . 4 = 24 zweimal größer, als 3 . 4 = 12 rc. hingegen dieses zweimal **kleiner als jenes, weil dessen Faktor 3 halb so groß, als der Faktor 6 von jenem Produkte ist.**

Und machten wir den einen Faktor um eben so viel mal größer als den andern kleiner, so kann der Werth des Produkts sich in nichts verändern, wie schon §. 41. ist bemerkt worden. Also ist das Produkt 4 . 3 = 40 . 0,3 = 30 . 0,4 = 12: denn da durch die erste Veränderung das Produkt bestimmtemal

größer, und durch die andere das größere Produkt gleich bestimmtemal kleiner wird, so muß nothwendig das vorgegebene wiederum entstehen.

§. 47.

Da auch ohne Zweifel ein Produkt 2, 3, 4 mal u. s. w. größer wird, wenn man dasselbe mit 2, 3, 4 rc. multiplizirt, so folgt in Rücksicht der im vorigen und 39 §. erkannten Wahrheit, daß ein und eben dieselbe Zahl entstehe, wenn drei gegebene Zahlen nach beliebiger Ordnung in einander multiplizirt werden.

Würden demnach die Zahlen 24, 35 und 2 gegeben, so muß 24.35.2 = 35.24.2 = 24.2.35 = 35.2.24 = 2.24.35 = 2.35.24 = 1680 seyn.

Denn da 24.35 = 35.24 ist, (nach §. 39.) so muß auch 24.35.2 = 35.24.2 seyn, d. h. die gleichen Produkte 24.35 und 35.24 geben 2 mal genommen gleiche Zahlen; da aber auch eben das nach vorigem §. erfolget, wann man zuvor einen der Faktoren zweimal größer macht, so ist auch 24.2.35 = 35.2.24; und weil endlich von diesen beiden Produkten im ersten 24.2 = 2.24, und im zweiten 35.2 = 2.35 ist, so folgt auch, daß 2.24.35 = 24.2.35, und 2.35.24 = 35.2.24 ist.

Diese zu bestimmenden Zahlen, um sie von allen übrigen zu unterscheiden, werden doppelte oder zweifache, dreifache, vierfache rc. Produkte genannt, weil in denselben stets ein Produkt zweier Zahlen 2, 3, 4 rc. mal genommen, genau enthalten ist. So ist im vorigen Beispiele 1680 das zweifache Produkt von 24.35. Und wollten wir deren dreifaches Produkt haben, so würden wir es durch 24.35.3 = 24.3.35 rc. vorstellen, und durch 2520 ausdrücken müssen.

Von diesen beiderlei Produkten haben wir vorzüglich deren Entstehung zu merken: nemlich, daß man entwe-

entweder das Produkt der beiden Zahlen 2 oder 3 mal nimmt; oder auch, daß man einen Faktor 2 mal oder 3 mal so groß macht, und mit der entstehenden Zahl den andern Faktor multiplizirt, welches aus der Vorstellung des obigen zweifachen Produkts einleuchtet.

§. 48.

Wie wir nun dargethan haben, daß drei Zahlen in jeder beliebigen Ordnung mit einander multiplizirt, eine gleiche Zahl hervorbringen; so können wir es auch von 4, 5 rc. und kurz, von jeder beliebigen Menge Zahlen darthun.

Wären z. E. die Zahlen 35.24.3 gegeben, so wissen wir nach vorigem §. daß 35.24.3 = 35.3.24 = 24.35.3 = 24.3.35 = 3.35.24 = 3.24.35 ist. Nehmen wir jetzt von denselben, wie 24, als ein Produkt der Zahlen 4.6, welche beide mit 35 und 3 multiplizirt, nicht weniger als die gegebenen Zahlen bestimmen können; so folgt, wenn wir 4.6 statt 24 setzen, daß auch 3.35.6.4 = 3.6.4.35 ist, was für Versetzungen diese vier Zahlen sonst noch erlauben möchten.

Nehmen wir ferner 35 = 7.5 und bringen letztere Faktores in die Stelle des Produkts, so muß auch offenbar 5.7.6.4.3 = 5.7.3.6.4 = 6.4.5.7.3 = 6.4.3.5.7 = 3.5.7.6.4 = 3.6.4.5.7 u. s. w. seyn, wo also fünf Zahlen in beliebiger Ordnung multiplizirt, dieselbe Zahl bestimmen.

Und stellen wir uns endlich bei gegebenen größern Zahlen vor, daß sie aus noch mehreren Faktoren entstanden sind, die wir nach und nach in ihre Stelle setzen, und mit ihnen alle mögliche Versetzungen machen können; so wird hierdurch die vorgetragene Wahrheit allgemein.

§. 49.

Da wir alles berührt haben, was uns von den unbenannten Zahlen zu unserm Zwecke dienlich ist; so wenden

den wir uns zu den benannten Zahlen, und bemerken, daß außer dem Flächen- und Körpermaße, die in der Geometrie näher bestimmt werden sollen, keine andere benannte Zahlen miteinander multiplizirt werden können; sondern, daß man blos benannte mit unbenannten Zahlen multiplizirt, wenn auch sonst anderweitige Bedingungen diese unbenannten als benannte angeben möchten.

Da die hier vorkommende Aufgaben unter die beiden Fälle begriffen werden; als:

a Eine gegebene Größe auf kleinere von gleichem Werthe zu bringen; und

b. Eine Größe zu finden, die eine vorgegebene bestimmtemal genommen, geben muß; so wollen wir beide auseinander setzen.

Dem ersten Falle gemäß sey demnach die Frage: wieviel Zoll, oder Linien, oder Punkte beträgt eine Ruthe nach zehntheiligem, und auch nach zwölftheiligem Längenmaß?

Da im zehntheiligen Maß $1^{\circ} = 10'$, $1' = 10''$, $1'' = 10'''$, $1''' = 10''''$ ist, (nach §. 19) und gleiche Größen gleichvielmal genommen, offenbar andere gleiche Größen geben müssen; so setzen wir

$1' = 10''$
mit $10 = 10$ multiplizirt

giebt $10' = 100''$
weil aber auch $1^{\circ} = 10'$

so ist $1^{\circ} = 10' = 100''$ (nach §. 21. e.)

Ferner ist $1'' = 10'''$
und $100 = 100$

mithin $100'' = 1000'''$
und da $100'' = 1^{\circ} = 10'$

so muß $1^{\circ} = 10' = 100'' = 1000'''$ seyn.

Endlich

Endlich ist $1''' = 10''''$
und $1000 = 1000$

mithin $1000''' = 10000''''$; und weil wiederum
$1000''' = 1^{\circ} = 10'' = 100''$

so folgt $1^{\circ} = 10' = 100'' = 1000''' = 10000''''$.
Und auf ähnliche Art wird
$1' = 10'' = 100''' = 1000''''$ rc. und
$1'' = 10''' = 100''''$ rc. gefunden.

Sehen wir diese bestimmten gleichen Größen an, so nehmen wir wahr, daß nach zehntheiligem Maße Ruthen in Fuße, Zolle rc. oder Fuße in Zolle rc. rc. zu verwandeln, nichts mehr erfordert werde, als daß man ihnen rechter Hand 1, 2 rc. Nullen anfüget.

Wäre demnach $7^{\circ}\ 4'\ 3''$ in Linien zu bestimmen, so setzen wir $7430'''$ u. s. w.

Da im zwölftheiligen Längenmaße $1^{\circ} = 12'$; $1' = 12''$, u. s. w. ist; so können wir auch hier setzen,
weil $1' = 12''$
und $12 = 12$

so ist $12' = 144''$ mithin ist $1^{\circ} = 12' = 144''$
Ferner ist $1'' = 12'''$
und $144 = 144$

mithin $144'' = 144.12''' = 1728'''$, u. folgl. $1^{\circ} = 12'$
$= 144'' = 1728'''$

Endlich weil $1''' = 12''''$
und $1728 = 1728$

so ist $1728''' = 1728.12'''' = 20736''''$, und mithin
$1^{\circ} = 12' = 144'' = 1728''' = 20736''''$ rc.
Und auf ähnliche Art wird
$1' = 12'' = 144''' = 1728''''$ rc. rc.
$1'' = 12''' = 144''''$ rc. gefunden.

Betrachten wir hier die einander gleichen Größen, so finden wir nach zwölftheiligem Maß, daß Ruthen in

Fuße

Fuße, Zolle u. s. w. oder Fuße in Zolle u. s. w. zu verwandeln, nicht mehr erfordert, als die gegebene Größe mit 12, oder 12 . 12 = 144, oder 12 . 12 . 12 = 1728 rc. zu multipliziren.

Wären also 8° zwölftheiliges Maß in Zollen zu bestimmen, so müssen 8° = 8 . 12 . 12″ = 8 . 144″ = 1152″ seyn.

Oder sollte 5° 6′ 4″ blos in Zollen vorgestellt werden, so ist klar, daß 5° = 5 . 12′ = 60′, und mithin 5° 6′ = 60′ + 6′ = 66′ ist; und weil 66′ = 66 . 12″ = 792″; so folgt, daß 5° 6′ 4″ = 792″ + 4 = 796″ ist.

Dergleichen Rechnungen leichter zu übersehen, setzt man gewöhnlich

5° 6′ 4″
12)—— . .
5° 6′ = 66 . .
12)———
664 .
132
———
796″ = 5° 6′ 4″.

Oder würde gefragt: was giebt 1 Thl. an Pf.? so setzen wir,

weil 1 Thl. = 24 Gr. und 1 Gr. = 12 Pf. ist
1 Gr. = 12 Pf.
24 = 24
———
1 Thl. = 24 Gr. = 288 Pf.

Oder: wie viel betragen 3 Thl. 8 Gr. 4 Pf. an Pf.? so setzt man

3 Thl. 8 Gr. 4 Pf.
24)——— . .
3 Thl. 8 Gr. = 80 . .
12)——— .
3 Thl. 8 Gr. 4 Pf. = 964 .

Haben wir nach dem zweiten Falle eine benannte Zahl bestimmtemal zu nehmen, oder mit einer unbenannten zu multipliziren; so fängt man bei den Einheiten des niedrigsten Werthes an, und addirt die in

den

den einzelnen Produkten entstehenden Einheiten der höhern Art zu den nachfolgenden Produkten, wo wir immer Rücksicht auf das Gesetz der benannten Zahlen nehmen.

Wäre demnach der Ausdruck $(8'9''11''').5$ gegeben, in welchem wir an den $11'''$ erkennen, daß zwölftheiliges Maß verstanden wird; so setzen wir

$$\frac{8'\ 9''\ 11'''}{3°\ 8'\ 1''\ 7'''}(5$$

und sprechen: $5.11''' = 55'''$ oder $4'' + 7'''$, setzen die $7'''$ hin, und sprechen ferner: $5.9'' = 45''$ zu welchen die vorgefundene $4''$ genommen $49''$ oder $4' + 1''$ bestimmen; wir setzen $1''$ hin, und sprechen $5.8' = 40'$, zu denen die vorigen $4'$ gerechnet $44'$ geben; und weil $44' = 3°\ 8'$ sind, so setzen wir diese Größen hin; mithin ist $(8'9''11''').5 = 3°\ 8'\ 1''\ 7'''$.

Ferner: wie viel beträgt der jährliche Sold einer Kompagnie, welcher monatlich 406 Thl. 19 Gr. 6 Pf. ausgezahlt werden muß?

Da das Jahr 12 Monate hat, so setzen wir:

In einem Monat werden 406 Thl. 19 Gr. 6 Pf. (12
mithin in einem Jahre 4881 Thl. 18 Gr. = Pf.
ausgezahlt.

Hier können wir sprechen: 12 mal 6 Pf. giebt so viel, als 6 mal 12 Pf., und da 12 Pf. = 1 Gr., so sind 6.12 Pf. = 6 Gr. Weiter 12 mal 19 Gr. ist so viel als 19 mal 12 Gr.; da aber 2.12 Gr. = 24 Gr. = 1 Thl. ist; so geben 19.12 Gr. nur 9 Thl. 12 Gr., wozu die vorigen 6 Gr. gerechnet, 9 Thl. 18 Gr. bestimmen; wir setzen also 18 Gr. hin. Und da endlich 406 Thl. 12 = 4872 Thl., mithin 4872 Thl. + 9 Thl. = 4881 Thl. ist; so ist klar, daß jährlich die Kompagnie 4881 Thl. 18 Gr. empfängt.

Sollte nach einer richtigen Vergleichung ein Regiment 33 Ctr. 100 ℔. 16 L. Pulver erhalten, welches mit 1165 Thl. 15 Gr. 3 Pf. bezahlt würde,

und

und man wollte wissen: wie viel Pulver an 6 Regimenter ausgegeben, und dafür bezahlt werden müßte? so sehen wir, daß 6 mal soviel empfangen und dafür bezahlt würde; folglich setzen wir:

1 Reg. empf. 33 Ctr. 100 ℔. 16 L. welch. kost. 1165 Thl. 15 Gr. 3 Pf. (6
mith. 6 Reg. 203 Ctr. 53 ℔. — L. welch. kost. 6993 Thl. 19 Gr. 6 Pf.

§. 50.

Da wir nun alle mögliche Zahlen multipliziren können, so wollen wir uns auch mit den Hülfsmitteln bekannt machen, vermöge welcher wir in den vornehmsten Fällen auf die leichteste Art ein jedes Produkt finden können. Wir nehmen demnach an:

a. Sind zwei Faktores ineinander zu multipliziren, deren Einer mit einer beliebigen Einheit anfängt oder endiget, so setzt man niemalen den Multiplikand unter die gefundenen einzelnen Produkte, sondern blos letztere, in Vergleichung der Theile, die der Multiplikator enthält, nach ihrem Werthe hin, und addirt sie mit den Multiplikanden zusammen, weshalb man die zehntheiligen Zahlen wie ganze Zahlen behandelt, und nachdem man addirt hat, im Produkt die zehntheiligen Stellen bestimmt.

Wäre also der Ausdruck 545 . 41 gegeben, so setzen wir

```
 545   (41
2180.
-----
22345
```

und sprechen: 545 . 40 = 21800 oder 2180 Zehner, deren 0 demnach unter des Multiplikanden Ziffer 4 zu stehen kömmt; addiren wir nun zu diesem das gefundene einzelne Produkt, so ist 22345 die verlangte Zahl.

Wäre 347 . 0,14 aufzulösen, so setzen wir

```
  347   (0,14
 1388
-----
48,58
```

Oder

Oder wäre 38,57 · 13,5 gegeben, so setzen wir

$$\begin{array}{r} 38,57 \\ \hline 11571 \\ 19285 \\ \hline 520,695 \end{array} (13,5$$

Wir sehen also in den letztern beiden Exempeln, daß man die Faktores als ganze Zahlen behandelte, und zuletzt im Produkte ihre zehntheilige Stellen bestimmte.

b. Grenzt eine der Zahlen nahe an hundert, tausend u. s. w. oder an Hunderttheile, Tausendtheile u. s. w. so nimmt man sogleich den Multiplikand hundertmal, tausendmal u. s. w. größer, machet nachher ein Produkt aus dem gegebenen Multiplikand und dem Unterschied des Multiplikators von 100, 1000 u. s. w. und ziehet es von dem vergrößerten Multiplikanden ab.

Wäre demnach 47639 · 98 gegeben, so setzen wir sogleich

4763900, und weil 100 — 98 = 2

so ist 95278 = 47639 · 2 = 47639 · (100 — 98)

u. das Produkt 4668622.

denn offenbar ist zuerst der Multiplikand durch die angehängten 2 Nullen hundertmal größer gemacht worden, da er aber im zu bestimmenden Produkte nur 98 mal, also zweimal weniger enthalten seyn sollte, so mußte man ihn zweimal nehmen, und von der vorbestimmten Zahl abziehen, welches auf die Art auch bei folgenden Beispielen einleuchtend wird.

Sollte 346,543 · 994 gegeben seyn, so ist klar, daß 1000 — 994 = 6 ist; mithin setzen wir:

346543

2079,258 = 346,543 · 6

und es ist 344463,742 das Produkt.

Ferner sey 875,32 · 99,95 gegeben, so ist 100 — 99,95 = 0,05, und wir setzen:

87532

$$\begin{array}{r} 87532 \\ 43{,}766 = 875{,}32 \cdot 0{,}05 \\ \hline 87488{,}234 \end{array}$$

c. Ist eine der gegebenen Zahlen ein Produkt zweier Faktoren, so thut man oft besser, wenn man die andern erst mit dem einen, und das entstehende Produkt nachher mit dem andern multiplizirt.

Wäre demnach 5046 . 72 gegeben, so sehen wir gleich, daß 72 = 8 . 9, mithin ist 5046 . 72 = 5046 . 8 . 9, und wir setzen:

$$\begin{array}{l} 5046 \\ \hline 45414 \quad (9 \\ \hline \quad (8 \\ 363312 = 5046 . 8 . 9 = 5046 . 72 \end{array}$$

Wäre 76409,326 . 0,064 aufzulösen, so setzen wir:

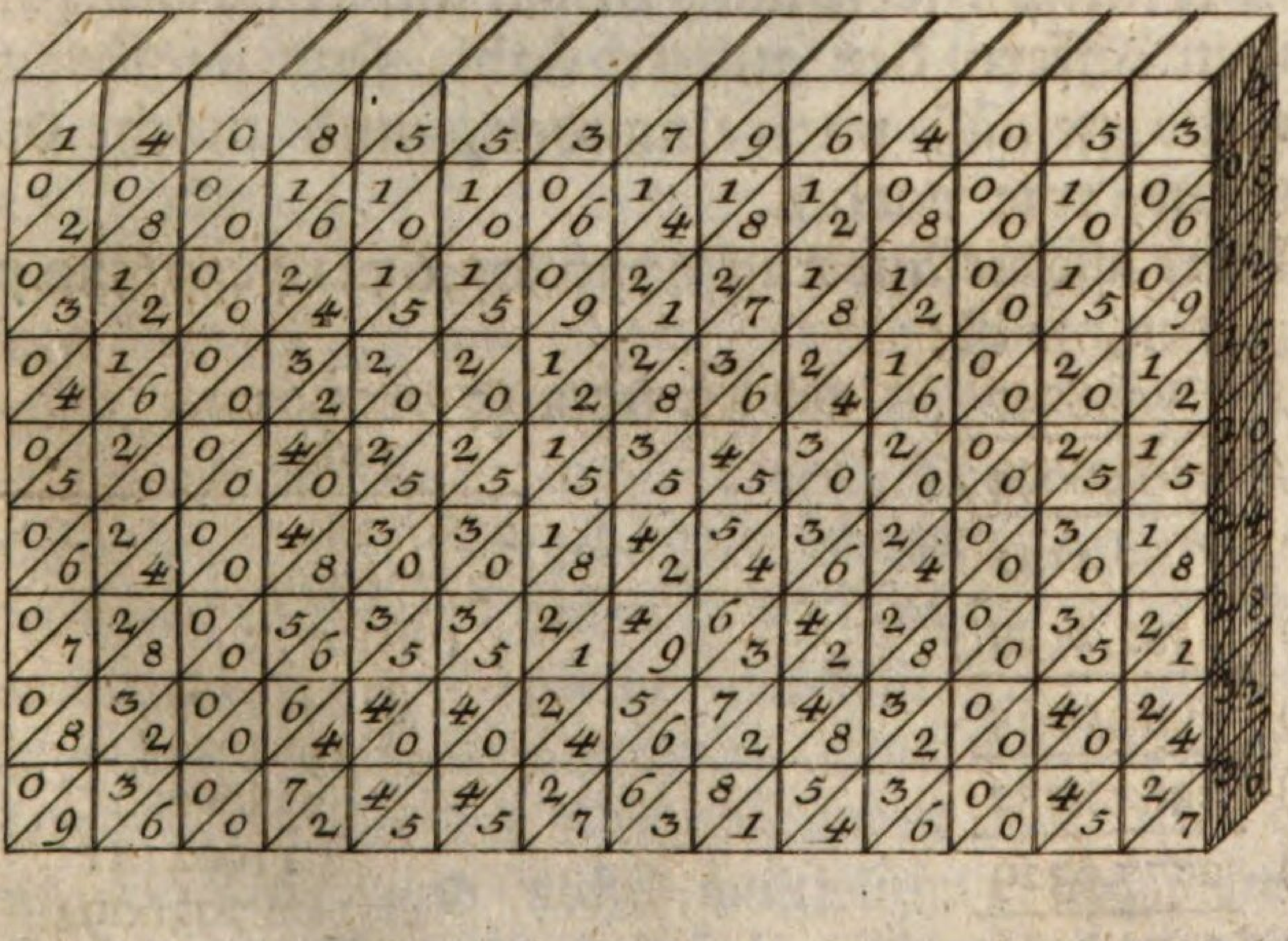
$$\begin{array}{l} 76409326 \\ \hline 611274608 \quad (8 \\ \hline \quad (8 \\ 4890{,}196864 = 76409{,}326 . 0{,}064. \text{ u. s. w.} \end{array}$$

d. Würden sehr große Zahlen gegeben, bei denen die vorigen Vortheile nicht anzuwenden sind, so müssen wir uns, um eine mühsame und oft fehlerhafte Rechnung zu vermeiden, der sogenannten Nepperschen Rechenstäbchen bedienen, die von ihrem Erfinder, einem Baron von Nepper den Namen erhalten haben. Dieselben sind ins Gevierte einen Zoll stark und 9 Zoll lang, haben auf jeder Seite, wie jede vertikale Reihe der pythagorischen Tabelle (§. 40.) 9 Felder, deren jedes mit einer Querlinie in zwei kleinere getheilet ist, in welchen die Produkte dergestalt stehen, daß unterhalb der Querlinie ihre Ziffern des niedern Werthes, hingegen oberhalb die des höheren Werthes, und wenn sie keine enthalten sollten, Nullen angetroffen werden. Demnach befinden sich auf den vier Seiten eines jeden Stäbchens

chens entweder die Produkte von vier Zahlen, nach der Ordnung 1, 2, 3, 4 oder 2, 3, 4, 5 u. s. w. oder von drei Zahlen nach gleicher Ordnung, wo dann die vierte Seite lauter Nullen hat; wie 0, 1, 2, 3; 9, 0, 1, 2; 8, 9, 0, 1; 7, 8, 9, 0, weil oft in einer zu multiplizirenden Zahl Nullen vorkommen, die sodann durch diese Stäbchen angezeigt werden.

Um ihren Gebrauch kennen zu lernen, werde uns nun der Ausdruck 14085537964,053 . 45346,72 gegeben.

Denselben aufzulösen, legen wir die Stäbchen nach der Ordnung der Ziffern 1, 4, 0, 8 u. s. w. neben einander, und erhalten dadurch gleichsam folgende kleine Tabelle, wo wir blos die Ziffern der 1ten, 2ten rc. Zeile querüber zusammen addiren, je nachdem der Multiplikand 1mal, 2mal u. s. w. genommen werden soll, setzen die so bestimmten Summen nach ihrem Werthe unter einander, und suchen endlich die Hauptsumme, welche das verlangte Produkt giebt, wie folget:



Wollen wir also das Produkt aus 4 . 14085537964053, haben, so nehmen wir die vierte Zeile, u. sagen: 2 ist 2, 1 + 0

 = 1,

=1, 2+0=2, 0+6=6, 1+4=5, 2+6=8, 3+8=11, setzen 1 hin, behalten für die folgende Stelle die andere 1, fahren fort, und sagen 2+2=4 und die vorige 1 giebt 5, 1+0=1 u. s. w. folglich erhalten wir zur Summe 56342151856212. Und eben so finden wir 5.14085537964053=70427689820265, u. s. w.

Demnach giebt 14085537964,053 mit
45346,72 multiplizirt

```
 56342151856212
  70427689820265
   42256613892159
    56342151856212
     84513227784318
      98598765748371
       28171075928106
```

zum Produkt 638732946105281,45616

e. Oder hat man keine Stäbchen, so setzt man die Produkte von der kleinen Zahl, in 2, 3, 4 u. s. w. untereinander, und nimmt nachher dieselben beim Multipliziren nach denen auf einander folgenden Ziffern der andern Zahl, setzt sie ihrem Werthe gemäß untereinander, und macht die Summe, wie vorhin.

Wäre also der Ausdruck 6750805,63214 . 396,8047 aufzulösen, so ist:

1) 396,8047
2) 793,6094
3) 1190,4141
4) 1587,2188
5) 1984,0235
6) 2380,8282
7) 2777,6329
8) 3174,4376
9) 3571,2423

und wir setzen 6750805,63214
396,8047

```
23808282
 27776329
  19840235
    31744376
     19840235
      23808282
       11904141
        7936094
         3968047
          5872188
```

folglich das Produkt 2678751403,619623058

denn

denn nehmen wir die höchste Ziffer 6 des Multiplikanden zuerst, so ist 6.396,8047 = 2380,8282, hierauf 7.3968047 = 2777,6329 u. s. w.

f. Endlich kann oft unser Zweck seyn, ein Produkt bis zu einer gewissen zehntheiligen Stelle genau zu haben, welchem gemäß die Rechnung auch abgekürzt werden kann: denn setzen wir voraus, daß die Genauigkeit bis zu einem Tausendtheilchen verlangt würde, welches in den meisten Fällen Genüge leistet, so kömmt es darauf an, sämtliche einzelne Produkte, die mehr als Zehntausendtheile angeben könnten, dergestalt zu bestimmen, daß deren niedrigste Ziffern die Stellen der Zehntausendtheile einnehmen, von deren Summe nachher blos die in ihr befindlichen Tausendtheilchen im verlangten Produkte aufgenommen werden. Um also die einzelnen Produkte angegebenermaßen zu erhalten, erinnern wir uns, daß Hunderttheile mit Hunderttheilen, Zehntheile mit Tausendtheilen, Einer mit Zehntausendtheilen, Zehner mit Hunderttausendtheilen u.s.w. multiplizirt, blos Zehntausendtheile, wie auch Zehner mit Zehntheilen, Hunderte mit Hunderttheilen u. s. w. blos Einer geben können, (zufolge des §. 41 und 47,) und beurtheilen nur darnach den Werth des Produkts vom höchsten Theil des einen Faktors mit dem niedrigsten des andern, was wir sogleich um 1, 2, 3 Stellen u. s. w. höher setzen, wenn der Werth des einen um 10, 100, 1000 mal u. s. w. größer ist, als die angegebenen; sodann fahren wir mit den nächst niedrigen Theilen in der Rechnung, bis zu dem Produkte fort, von dem die niedrigste Ziffer die Stelle der Zehntausendtheile einnimmt. Nach diesen werden die niedrigsten Theile des Multiplikanden nach und nach ausgestrichen, und nicht multiplizirt, daher immer alle folgende Produkte mit Zehntausendtheilen endigen. Sollte hingegen der höchste Theil des einen Faktors, einen 10, 100, 1000 mal u. s. w. kleinern Werth haben,

so streicht man sogleich 1, 2, 3 Ziffern des niedrigsten Werthes vom Multiplikanden weg, und fährt mit diesem Wegstreichen bei den folgenden einzelnen Produkten fort, welches nachstehende Beispiele deutlich machen.

Würde demnach 145,3276 . 4,5382 gegeben, so könnten wir nach der gewöhnlichen Art setzen:

		145,3276
		4,5382
145,3276 . 4	=	581,3104
. 0,5	=	72,66380
. 0,03	=	4,359828
. 0,008	=	1,1626208
. 0,0002	=	2906552
145,3276 . 4,5382	=	659,52571432

Hätten wir nun dieses Produkt bis auf Tausendtheilchen zu nehmen, so würde es 659,525 seyn.

Beobachten wir aber die gegebene Regel, so setzen wir:

145,~~3276~~			
4,5382			
581,3104	=	145,3276	. 4
72,6635	=	145,327	. 0,5
4,3596	=	145,32	. 0,03
1,1624	=	145,3	. 0,008
290	=	145,	. 0,0002
659,525	=	145,3276 . 4,5382	

und sprechen: 4 mal 145,3276 giebt 581,3104, in welchem Produkte die 4, Zehntausendtheile bezeichnet, mithin würde 145,3276 . 0,5 offenbar Hunderttausendtheile bestimmen, weshalb wir aus dem Multiplikanden die 6 wegstreichen, und 145,327 bekommen, u. s. w. Da endlich die Summe der Zehntausendtheile 19 ist, so können wir dieselben für 2 Tausendtheile rechnen; und also erhalten wir 659,525 wie vorher.

Würde 145,3276 . 453,82 gegeben, so setzen wir erst sämtliche Produkte aus 145,3276 in 400, und 50,

und 3 hin, und streichen nach letzterm erst die 6 u. s. w. durch; nemlich:

145,3276
453,82

58131,04 = 145,3276 . 400
7266,380 = . 50
435,9828 = . 3
116,2616 = 145,327 . 0,8
2,9064 = 145,32 . 0,02

65952,571 das Produkt u. s. w.

Würde hingegen 145,3276 . 0,45382 gegeben, so streichen wir sogleich von dem Multiplikanden die Ziffer 6, weil dieselbe mit 0,4 multiplizirt, schon Hunderttausendtheile geben; mithin setzen wir:

145,3276
0,45382

58,1308 = 145,327 . 0,4
7,2660 = 145,32 . 0,05
4359 = 145,3 . 0,003
1160 = 145 . 0,0008
28 = 140 . 0,00002

folglich ist 65,951 das verlangte Produkt.

Wäre 14,53276 . 0,0045382 gegeben, so setzen wir:

14,53276
0,0045382

0,0580 = 14,5 . 0,004
70 = 14, . 0,0005
3 = 10, . 0,00003

und es ist 0,065 das verlangte Produkt.

In diesem Beispiele erkennen wir, daß auch nach dieser Bestimmung oft noch zehntheilige Stellen des Multiplikators wegfallen müssen, wodurch diese Rechnung noch mehr erleichtert wird.

Uebrigens können diese Produkte noch genauer gefunden werden, wenn man jederzeit die vorher durchstrichenen Ziffern des Multiplikanden multiplizirt, und deren entstehende Zehntausendtheile nachher zum eigentlich zu bestimmenden Produkte rechnet. So würde das letztere Beispiel schon geben, wenn wir setzten:

$$\begin{array}{l}
14{,}5\not{3}\not{2}\not{7}\not{6} \\
\underline{0{,}004538\not{2}} \\
0{,}0581 = 14{,}5 \,.\, 0{,}004 \\
\quad\;\; 72 = 14 \quad .\, 0{,}0005 \\
\quad\;\;\; \underline{4 = 10 \quad .\, 0{,}00003} \\
0{,}066 \text{ das verlangte Produkt.}
\end{array}$$

und sagten: $0{,}004 \,.\, 0{,}03 = 0{,}00012 = 0{,}0001$, mithin $14{,}5 \,.\, 0{,}004 = 0{,}0580 + 0{,}0001 = 0{,}0581$ u. s. w. und zuletzt, weil die Summe der Zehntausendtheile, nemlich 0,0007 sich mehr 0,001 nähert, so können wir es dafür annehmen.

Da wir nun alles wissen, was bei dergleichen Zahlen in dieser Rechnung zu beobachten ist, so schreiten wir zur vierten Rechnungsart.

Vierte Rechnungsart.

Von der Theilung der Zahlen, oder der Division.

§. 51.

Dividiren heißt eine Zahl finden, die in der einen gegebenen so oft enthalten ist, als in der andern die Einheit.

Dieser Erklärung zufolge ist wiederum von zwei gegebenen Zahlen die Rede, nach welchen eine dritte zu bestimmen ist; da nun diese in der einen gegebenen so oft enthalten seyn soll, als die Einheit in der andern,

so

so muß sie eben so oft von ihr weggenommen, keinen Rest lassen; weshalb man auch sagen könnte: **Dividiren heißt, eine Zahl finden, die so oft von der einen hinweggenommen, als die andere Einheiten enthält, keinen Rest lasse**, welche Erklärung der obigen (§. 22.) gemäß ist, und zur zweiten Hauptveränderung, nehmlich der Verminderung der Größen, gehöret.

Um nun diese Zahlen voneinander unterscheiden zu können, wollen wir die zu bestimmende Zahl den **Quozienten**; diejenige, in welcher sie enthalten seyn soll, den **Dividenden**; und diejenige, welche eben so oft die Einheit enthält, den **Divisor** nennen; mithin muß der Dividend den Quozienten so oft, als der Divisor die Einheit enthalten; oder der Quozient aus dem Dividenden genau so, als die Einheit aus dem Divisor entstehen.

Würde uns demnach der Ausdruck $8:2=4$ gegeben, so müßte 4 der Quozient, 2 der **Divisor**, und 8 der **Dividend** genannt werden.

§. 52.

Erinnern wir uns jezt der Eigenschaften, welche beim Multiplikanden, Produkt und Multiplikator angegeben wurden, (§. 37.) und vergleichen nach denselben den Quozienten, Dividenden und Divisor; so müssen wir alsbald erkennen, daß wir hier, den Quozienten als Multiplikanden, den Dividenden als Produkt, und den Divisor als Multiplikator betrachten, und mithin schließen können: **Daß nur diejenige Zahl ein Quozient seyn könne, die mit dem Divisor multiplizirt, den Dividenden hervorbringt.**

Und ferner; da es einerlei ist, welchen Faktor wir zum Multiplikanden bestimmen wollen, (§. 39.) daß man obige Erklärung auch dahin ändern könnte, daß man das, was man dem Divisor zueignete, dem Quozienten, und so umgekehrt, ertheilete.

In dieser Rechnung können also eigentlich zwei Fragen gethan werden, nemlich:

a. Der wievielste Theil ist die eine gegebene Zahl von der andern?

b. Wie groß ist der Theil der einen Zahl, den die andere anzeigt?

So würde man sagen: in dem Ausdruck 8 : 2 = 4 ist die Zahl 2 der 4te Theil von 8; und umgekehrt 4 ist der 2te Theil von 8, u. s. w. welche letztere Bestimmung immer verstanden wird, sobald der Werth des Divisors größer, als der des Dividenden ist.

§. 53.

Nach den vorigen richtigen Betrachtungen kann es nun nicht schwer werden, den Quozienten aller möglichen Zahlen zu bestimmen, die wir ebenfalls unter den drei Fällen nehmen wollen, wie bei der Multiplikazion (§. 41.) ist angezeigt worden.

Würde uns also, dem ersten Falle gemäß, der Ausdruck 8:2 (aus v. §.) gegeben, so würden wir dabei folgendes beobachten. Man setze den Dividenden zwischen zwei Striche, und vor ihm den Divisor also:

$$\begin{array}{c} 2|8|4 \\ 8 \\ \hline \end{array}$$

und spreche: 2 in 8 ist 4 mal enthalten, weil 2.4 = 8, und bringe die 4 hinter den Dividenden, und das Produkt unter denselben, ziehe einen Strich; und spreche: 8 von 8 weggenommen, läßt keinen Rest, und mithin muß 4 der verlangte Quozient seyn: denn da es offenbar ist, daß 2 aus 1, wie 8 aus 4 nach der pythagorischen Tabelle (§. 40.) entstehet; so ist auch umgekehrt wahr, daß 1 aus 2, wie 4 aus 8 entstehet, welche Eigenschaft die 4 nach (§. 51.) haben sollte, und was zu erweisen war.

Diese Vorstellung der Rechnung ist zwar die gewöhnlichste, aber nicht nothwendig, sondern man kann sie auch auf folgende Art anzeigen, welche oft weit bequemer ist, nemlich:

$$\overset{2}{\smile}\ 8|4; \quad \text{oder} \quad 2)\frac{8}{4}; \quad \text{oder} \quad \frac{8}{4}(2.$$

wo bei allen der Dividend 8 durchstrichen wird.

Wären nun die Ausdrücke 80:20; 800:200; 8000:2000, u. s. w. oder 0,8:0,2; 0,08:0,02; 0,008:0,002 u. s. w. aufzulösen; so würden sie alle den Quozienten 4 enthalten: denn erinnern wir uns, daß der Multiplikand unverändert bleibt, wenn der Multiplikator und das Produkt gleich vielmal größer oder kleiner gemacht wurden, (§. 46.) so folgt auch, daß in Rücksicht des 52sten §. der Werth des Quozienten im geringsten nicht verändert werden könne, wenn man den Divisor und Dividenden um gleich vielmal größer oder kleiner macht; folglich ist $\frac{8\not{0}}{2\not{0}}=4$ u. s. w. und eben so auch $\frac{0{,}8}{0{,}2}=\frac{8}{2}=4$ u. s. w.

Ferner sei 90 mit 3 zu theilen; so setzen wir:

$$3|90|30; \text{ oder } 3)\frac{90}{30}$$
$$\underline{90}$$

und sprechen: 3 ist in 9, 3 mal enthalten, weil 3.3=9; und setzen 3 als den Quozienten.

Wäre hier nun blos 9 zu theilen, so wäre 3 der wahre Quozient: da aber 90 zu theilen war, so ist klar, daß 3 nicht der verlangte Quozient seyn kann; mithin sprechen wir ferner: Weil das Produkt des Quozienten und des Divisors, oder die Zahl 9 offenbar 10 mal kleiner als der Dividend ist; so muß dasselbe zehnmal größer gemacht werden; macht man aber das Produkt zehnmal größer, so folgt, da der Divisor unverändert bleiben soll,

daß

daß der Quozient auch zehnmal größer werden müsse; und mithin ist 30 der wahre Quozient, wie man ihn angezeigt hat.

Machen wir gleiche Folgerungen bei ähnlichen Beispielen, so ist klar, daß 600 : 3 = 200; 8000 : 4 = 2000; $900\not{0}\not{0} : 3\not{0}\not{0} = 900 : 3 = 300$; $60\not{0} : 3\not{0} = 60 : 3 = 20$ ist, u. s. w.

Wäre der Ausdruck 50 : 2 aufzulösen; so setzen wir

2|50|20 + 5 = 25
40
――
10
10
――

und sprechen: 2 in 5 giebt 2 zum Quozienten, da aber nicht 5 sondern 50 zu theilen ist; so muß nach vorigen Beispielen der Quozient in 20 verwandelt, und das Produkt 2 . 20 = 40, oder blos die 4 als Zehner unter die 5 Zehner des Dividenden gesetzt und abgezogen werden, wodurch wir 1 Zehner zum Rest erhalten, zu dem wir die Null herunter rücken. Um also den ganzen Quozienten zu erhalten, sprechen wir: 2 in 10 giebt 5, weil 2 . 5 = 10 ist, und so erhalten wir dann eigentlich 20 + 5 = 25 zum wahren Quozienten.

An dem Quozienten 25 erkennen wir nun, daß es nicht nothwendig sey, während der Rechnung dessen einzelne Theile vorzustellen, sondern daß man blos dieselben ihrer Entstehung gemäß hintereinander setzen darf, wodurch nach und nach jeder seinen wahren Werth erhält. Auch ist zu bemerken, daß man bei so kleinen Zahlen, die Rechnung lieber auf die andere Art vorstellet, der wir uns von jezt an bedienen werden.

Wäre ferner 7000 : 40 gegeben; so würden wir setzen

$\not{3}\not{2}$
$4\not{0})\,\not{7}\not{0}\not{0}\not{0}$
175

und

und sprechen: 4 in 7 giebt 1 zum Quozienten; $1.4 = 4$ von 7 läßt 3, zu der die nächste 0 gerechnet 30 macht; ferner 4 in 30 giebt 7, $4.7 = 28$ von 30 genommen läßt 2, die mit der nächsten 0 offenbar 20 macht; endlich 4 in 20 giebt 5, weil $4.5 = 20$; mithin ist 175 der verlangte Quozient.

Eben so würden wir bei 7000000 . 8000 setzen:

$$8\not{0}\not{0}\not{0})\,\frac{\overset{\not{6}\not{4}}{\not{7}\not{0}\not{0}\not{0}\not{0}\not{0}\not{0}}}{875}$$ der Quozient u. s. w.

Nehmen wir nun Beispiele, wo der **Divisor** eine **zehntheilige Zahl** ist; so erinnern wir uns, daß er mit dem Dividenden um gleich vielmal größer gemacht werden könne, (§. 46; 52,) damit man mit einer ganzen Zahl zu theilen haben.

Wäre demnach 6 : 0,3 gegeben; so schließen wir: weil $6 : 0{,}3 = 60 : 3$ so muß 20 der Quozient seyn.

Eben so ist $7 : 0{,}004 = 7000 : 4 = 1750$; $9 : 0{,}00008 = 900000 : 8 = 112500$ u. s. w.

Sollte hingegen 0,06 : 2 aufgelöset werden, wo der **Dividend eine zehntheilige Zahl** ist, so setzen wir:

$$\begin{array}{r|r|l} 2 & 0{,}06 & 0{,}03 \\ & 6 & \\ \hline \end{array}$$

und sprechen: 2 in 6 ist 3mal enthalten, weil $2.3 = 6$; da nun aber 6 offenbar 100 mal größer als der Dividend 0,06 ist, so muß dieses Produkt 6, mithin auch der Quozient 3, hundertmal kleiner gemacht werden (nach §. 52); folglich ist der verlangte Quozient 0,03, wie wir angezeigt haben, und wirklich nur dann ist auch der Dividend $0{,}06 = 2 . 0{,}03$ (nach §. 41.)

Auf eben diese Art ist einleuchtend, daß $0{,}0008 : 4 = 0{,}0002$; $0{,}00009 : 3 = 0{,}00003$ u. s. w.; ferner $0{,}008 : 40 = 0{,}0008 : 4 = 0{,}0002$; $0{,}0003 : 200 = 0{,}000003 : 2 = 0{,}0000015$; und $0{,}07 : 8000 = 0{,}00007000 : 8 = 0{,}00000875$ u. s. w.

Unter=

Unter diese gegebenen Zahlen gehören nun auch offenbar diejenigen ganzen Zahlen, deren Divisor größer als der Dividend ist; also wenn 6:200 aufzulösen wäre, so könnten wir setzen; 6:200 = 0,06:2 = 0,03; und eben so ist 5:8000 = 0,0005000:8 = 0,0000625 u. s. w.

Nehmen wir endlich in beiden Zahlen eine verschiedene Anzahl zehntheiliger Stellen an; so müssen wir auch bei ihnen die vorhergezeigten Verwandlungen machen, damit blos der Divisor eine ganze Zahl werde.

Wäre also der Ausdruck 0,0008:0,02 aufzulösen; so setzen wir:

$$\frac{0{,}0008}{0{,}02}, \text{ und besser sogleich } 2|0{,}08|0{,}04$$

und sagen: da 0,0008:0,02 = 0,08:2; so muß 0,04 der Quozient seyn.

Und eben also ist 0,000006:0,003 = 0,006:3 = 0,002; 0,00000009:0,0003 = 0,0009:3 = 0,0003 u. s. w.

Ferner 0,6:0,003 = 600:3 = 200; 0,008:0,00004 = 800:4 = 200; 0,0009:0,000000008 = 900000:8 = 125000 u. s. w.

Vergleichen wir nun in allen gegebenen Exempeln die Stelle des ersten Theils des Quozienten mit der Stelle, in welcher das aus demselben, und dem Divisor entstehende Produkt im Dividenden endiget; so finden wir, daß beide Stellen einerlei Werth haben; weshalb wir folgende allgemeine Regel annehmen können.

Sind Zahlen ineinander zu dividiren: so mache man, nach Beschaffenheit des Divisors, beide um 10, 100 2c. mal größer oder kleiner, damit der Divisor blos Einer enthalte; theile sodann mit demselben den Dividenden, und bestimme den

Werth des entstehenden Quozienten dergestalt, daß dessen erster Theil eben die Stelle einnehme, in welcher das aus ihm und dem Divisor gemachte Produkt im Dividenden endiget.

§. 54.

Da nunmehro kein unauflösliches Beispiel für den ersten Fall gedacht werden kann, so nehmen wir den zweiten Fall, wo eine gegebene Zahl mehr bedeutende Ziffern hat.

Wäre demnach 35 durch 7 zu theilen, so setzen wir:

$$\frac{35}{7} = 5; \quad \text{oder } 7|35|5 \atop \underline{35}$$

und sprechen: 7 in 35 ist 5 mal enthalten, weil $5.7 = 35$ ist.

Ferner giebt der Ausdruck 5600:7 offenbar 800, weil $7.8 = 56$, und diese 56 im Dividenden in der Stelle der Hunderte endiget.

Eben so muß denn auch $0,063 : 7 = 0,009$ seyn, weil das Produkt von $7.9 = 63$ in der Stelle der Tausendtheile endiget.

Uud so ist ferner $36:400 = 0,36:4 = 0,09$; $12:3000 = 0,012:3 = 0,004$; $0,0081:0,09 = 0,81:9 = 0,09$; $0,0000036 : 0,0004 = 0,036:4 = 0,009$; $0,00072 : 0,08 = 0,072 : 8 = 0,009$; und $0,0042 : 0,00006 = 0,00420 : 0,00006 = 420 : 6 = 70$; $0,054 : 0,00009 = 5400 : 9 = 600$; $0,27 : 0,00009 = 27000 : 9 = 3000$ u. s. w.

Wäre hingegen 456 mit 3 zu theilen; so setzen wir:

$$3)\frac{456}{152}$$

und sprechen, indem wir die Anmerkung des vorigen § befolgen: 3 in 4 getheilt giebt 1 zum Quozienten; 1 mal $3 = 3$, von 4 läßt 1, zu welcher die nächste 5 gerechnet, 15 giebt; ferner 3 in 15 giebt 5, $3.5 = 15$, von 15 weggenommen, läßt keinen Rest; endlich 3 in 6 giebt

2, und weil 2.3=6, so folgt, daß 152 der wahre Quozient sey.

Sollte 2345 durch 4 getheilt werden, so setzen wir:

```
4|2345|586,25
  20
  --
   34
   32
   --
    25
    24
    --
     1,00
        8
     ----
       20
       20
       --
```

Hier sehen wir, daß 2345:4 einen beträchtlichern Quozienten, als 586 geben kann, weil nach dem letzten abgezogenen Produkt noch 1 übrig bleibt; um ihn also genauer zu bestimmen, schließen wir: da 1 so viel als 1,00, oder hundert Hunderttheile (nach §. 14.) ist, so können wir dieselben statt 1 nehmen und weiter sprechen: 4 in 10 Zehntheile giebt 0,2 im Quozienten, u. s. w. und so wird klar, daß der eigentliche Quozient der gegebenen Zahlen 586,25 seyn müsse, welches wohl zu merken ist, weil wir in der Folge bei ähnlichem Falle eben das beobachten können.

Ferner: wäre 54970000 mit 4 zu theilen; so setze man:

```
    xxxxx
    5̸4̸9̸7̸0̸0̸00
4)-----------
    13742500
```

Hier bemerken wir, daß nach geschehener Rechnung nothwendig die zwei übrig bleibende Nullen des Dividenden an dem Quozienten angehängt werden mußten, da nach der gegebenen Regel dessen erster Theil die Stelle der Zehnmillionen einnehmen sollte, in welcher das

das aus ihm und dem Divisor entstehende Produkt beim Dividenden endiget.

Wäre der Ausdruck 2300004:0,005 aufzulösen, so setzen wir, weil 2300004:0,005 = 2300004000:5 ist.

$$5)\frac{2300004000}{460000800}$$

In diesem Exempel mußten wir dem Quozienten 46 noch 4 Nullen, und nach denselben die Ziffer 8 mit 2 Nullen setzen, um ihm seinen wahren Werth zu verschaffen, weil nur dadurch dessen erster Theil 4 in der 9ten Stelle zu stehen kommen konnte, worinnen das Produkt aus ihm und dem Divisor beim Dividenden endiget, welche gleiche Bewandniß bei den 8 Hunderten statt findet.

Eben so finden wir: daß 43002 : 0,0008 = 430020000 : 8 = 53752500; 3822063 : 0,07 = 382206300 : 7 = 54600900; 57243 : 0,006 = 57243000:6 = 9540500 ist, u. s. w.

Ferner, wäre 748,4616:9 gegeben, so setzten wir

$$\begin{array}{l} \quad 21523 \\ 9)\overline{748,4616} \\ \quad 83,1624 \end{array}$$

Und eben so muß 345,744 : 40 = 34,5744 : 4 = 8,6436; 0,365 : 800 = 0,00365000 : 8 = 0,00045628; 0,7490868:4000 = 0,0007490868:4 = 0,0001872717 u. s. w. seyn.

Wäre weiter 3,765:0,5 gegeben; so setzten wir: weil 3,765:0,5 = 37,65:5 ist

$$5)\frac{37,65}{7,53}$$

und eben so ist auch 0,007534 : 0,008 = 7534 : 8 = 0,91675 u. s. w.

Sollte endlich 5,64:0,0006 aufgelöset werden, so setzten wir, da 5,64:0,0006 = 56400:6 ist,

$$6)\frac{56400}{9400}$$

So wäre auch offenbar 0,000247002:0,000000000003 = 247002000 : 3 = 82334OO u. s. w.

§. 55.

Da wir nun auch alle mögliche Quozienten der zum zweiten Fall gehörigen Zahlen bestimmen können: so nehmen wir den 3ten Fall, in welchem die Zahlen mehr als eine bedeutende Ziffer haben.

Wäre also 168 durch 12 zu theilen, so setzen wir:

```
12|168|14
   12
   --
    48
    48
```

und sprechen 12 in 16 ist 1 mal enthalten, setzen 1 als den 1sten Theil des Quozienten, und multipliziren hierauf den ganzen Divisor mit selbigem; also ist 1 . 12 = 12, welches Produkt unter 16 Zehner gesetzt, und abgezogen, den Rest 4 giebt. Da nun ferner die vom Dividenden zu diesem Rest genommene nächste Ziffer 8 die Zahl 48 bestimmet, so sprechen wir: 12 in 48 ist 4 mal enthalten, setzen wiederum die 4 als Quozienten, machen das Produkt 4 . 12 = 48, was von 48 abgezogen, nichts zum Rest läßt; und schließen demnach, daß 14 der wahre Quozient von den gegebenen Zahlen sey.

Uns hiervon zu überzeugen, bemerken wir: daß der Dividend 168 = (120 + 48) ist, und daß also jede dieser gleichen Größen, mit einerlei Zahl getheilt, gleiche Quozienten geben müsse. Nun ist aber offenbar 120 : 12 = 10, hingegen 48 : 12 = 4; folglich besteht der Quozient der aus beiden Zahlen 120 + 48 zusammengesetzten Zahl 168 aus 10 + 4 = 14, wie wir oben gefunden hatten.

Uebrigens müssen wir hier bemerken, daß man bei Exempeln dieser Art, stets den Werth der zwei, drei,

drei, auch wohl noch mehrern höchsten Ziffern des Divisors, mit dem Werthe einer gleichen Menge Ziffern des Dividenden, vor der Rechnung so mit einander vergleichen muß, als ob sie in gleichen Stellen stünden. Sehen wir dann, daß der letztern Werth größer, wie im vorigen Beispiele, oder auch gleich dem Werthe der ersteren ist, so können wir die Rechnung geradezu anfangen; wäre er aber kleiner, so müssen wir im Dividenden eine Ziffer mehr nehmen, und mit der höchsten Ziffer des Divisors in die zwei ersten Ziffern des Dividenden so theilen, daß der erste entstehende Theil des Quozienten nicht zu groß genommen wird, der sich nur durch die angezeigte Vergleichung bestimmen läßt.

Ferner: sollte während der Rechnung der Fall eintreten, daß eine zu theilende Zahl mit dem ganzen Divisor verglichen, zu klein wäre, so muß man, wie beim Exempel 2300004:0,005 des vorigen §. im Quozient so oft Nullen setzen, als der nach und nach um eine Ziffer vermehrte zu theilende Rest kleiner als der Divisor bleibt, damit durch diese Nullen die vorher gefundenen Theile des Quozienten ihren wahren Werth erhalten.

Hätte man endlich einen Theil des Quozienten zu groß genommen, welches sich entdecket, wann das entstehende Produkt aus demselben in dem Divisor größer, als die zu theilende Zahl wird, so ziehe man diese von jenem ab, vermindere den Quozienten um eine Einheit, und ziehe den erhaltenen Rest vom Divisor ab. Wäre hingegen umgekehrt der Theil des Quozienten zu klein genommen, so wird das gemachte Produkt, von der getheilten Zahl abgezogen, einen Rest geben, der größer als der Divisor ist; alsdann vermehre man den Quozienten

ten um eine Einheit, und ziehe den Divisor vom gefundenen Rest ab.

Um diese verschiedenen Fälle zu sehen, sey 2764960704 mit 576 zu theilen. Demnach setzen wir:

```
                              8  7
576|2764960704  f. 4700289
    2304:.....
    ----
     4609.....
     4032.....
     ----.....
      577.....
      576.....
      ---.....
       1607..
       1152..
       ----
        4550.
        4608.
        ----.
          58.
         576.
         ---.
         5184
         5184
         ----
```

und sprechen: da 57 größer als 27 ist, 5 in 27 giebt nur 4 zum Quozienten (weil, wenn 5 dafür genommen würde, das Produkt von 5 in die zweite Ziffer 7 vom Divisor, schon 35 giebt, von welchem die 3 zu dem Produkt 5.5 genommen, die nicht abzuziehende Zahl 28 bestimmt) 4.576=2304 von 2764 abgezogen, läßt 460, zu der die 9 herunter gesetzt 4609 giebt. Ferner 5 in 46 giebt 7, 7.576=4032 von 4609 abgezogen, läßt 577 eine Zahl, die offenbar größer als 576 ist; demnach hätte dieser Divisor noch einmal mehr können abgezogen werden; diesem also Genüge zu thun, vermehren wir den Quozienten um 1, d. i. streichen die vorige 7 weg, und setzen an ihrer Stelle 8, aber unter 577 die 576, ziehen diese von jener ab, der letzten Bemerkung gemäß, um nicht erst

von

von neuem das Produkt 8.576 zu bestimmen, und erhalten 1 zum Rest, zu dem die 6 heruntergesetzt, 16 giebt, eine Zahl, die kleiner als der Divisor 576 ist, daher der Quozient 0 seyn muß, nach der 2ten Bemerkung. Setzen wir nun die 0 herunter, so ist auch 160 kleiner als 576, weshalb der Quozient wiederum eine 0 bekömmt. Setzen wir endlich die 7 herunter, wodurch wir 1607 bekommen; so können wir sagen: 5 in 16 giebt 2, 2.576=1152 von 1607 weggenommen, läßt 455, zu der die 0 herunter gesetzt 4550 giebt; endlich 5 in 45 giebt 8, 8.576= 4608, eine Zahl die größer als 4550 ist, weshalb wir, statt 8, die 7 im Quozient setzen, und die 4550 von 4608 abziehen müssen, wodurch wir 58 erhalten, welche Zahl anzeigt, daß so viel Einheiten 4550 noch hätte haben müssen, wenn 8.576 von ihr abgezogen, keinen Rest lassen sollte; da nun aber ein Rest bleiben muß, wenn 576 einmal weniger abgezogen wird, so können wir ihn sogleich finden, wenn wir 576 um die 58 vermindern, weshalb wir jene unter diese setzen, abziehen, und so 518 erhalten, zu welcher Zahl die 4 herunter genommen 5184 giebt, in welcher 576 genau 9mal enthalten ist.

Eben so ist 2004480:116=17280; 76324:1250000 =7,6324:125=0,0610592 u. s. w.

Ferner, 5487,048:54=101,612;
864,537408:864=1,000622; und
0,0642712:644=0,0000998; u. s. w.

Weiter, 7453,68:7800=74,5368:78=0,9556; und
24581,648:364000=24,581648:364 =0,067532, ꝛc.

Oder 0,0534772:0,538 = 53,4772:538 = 0,0994;
7,31472:0,0735 = 73147,20:735 = 99,52 u. s. f.

 Und

Und endlich 274,12 : 0,00028 = 27412000 : 28 = 979000; und
14,73:0,00015=1473000:15=98200 u. s. w.

§. 56.

Nachdem wir nun alle mögliche Zahlen zu theilen wissen, wenn der Dividend wirklich ein Produkt vom Divisor in irgend einer ganzen oder zehntheiligen Zahl ist; so dürfen wir darum nicht denken, daß bei allen gegebenen Zahlen ein Quozient genau eine der uns bisher bekannt gewordenen Zahlen seyn müsse, und also auch gefunden werden könne; weil solches schon in denen Fällen nicht seyn kann, wo der Dividend und Divisor nicht gleiche Primzahlen, oder Produkte derselben sind. Denn so ist er z. E. bei 5 : 3 nicht genau zu bestimmen, man mag auch 5 = 5,0 oder 5,00 u. s. w. setzen, weil eine mit 0 endigende Zahl blos die 2 oder 5, aber nicht 3 genau enthält, (§. 44. a. und c.) und deshalb nach jeder Theilung ein Rest übrig bleiben muß: welche Beschaffenheit es auch mit denen aus ihnen genommenen Produkten hat.

Darum müssen wir hier noch zeigen, wie man den Quozienten solcher Zahlen so genau bestimmt, daß dessen Werth von seinem wahren so wenig abweichet, daß der dabei obwaltende Fehler für nichts zu achten ist, weshalb dergleichen Rechnung, einen Quozienten durch Näherung zu bestimmen, genannt wird; weil man durch sie dem wahren Werthe des Quozienten so nahe kommen kann, als einem gefällig ist, ob man ihn gleich nie erreicht; zu welcher Absicht folgende Regel dienet:

Um einen Quozienten durch Näherung zu bestimmen, hänge man dem Dividenden so viel Nullen an, als zehntheilige Stellen im Quozienten verlangt werden, und verfahre in der Rechnung, wie bisher geschehen.

Gesetzt,

Gesetzt, daß der Ausdruck 748 : 73 aufzulösen wäre, und man wüßte, daß nach der Anwendung dieser Zahlen ein Tausendtheilchen für nichts zu achten sey, so setzen wir, weil 748 = 748,000 (nach §. 15.)

```
73|748,000|10,246
   73
   ----
    18,0
    14,6
   -----
     340
     292
    -----
      480
      438
     -----
       42
```

und so würde 10,246 der verlangte Quozient seyn: denn hätten wir zu den Tausendtheilchen noch eins gesetzt, so würde offenbar das zuletzt abzuziehende Produkt zu groß geworden seyn.

Wollte man aber bei dergleichen Zahlen den Quozienten nicht auf vorgezeigte Art bestimmen, so kann man der gefundenen ganzen Zahl den Rest anhängen, und unter diesen den Divisor setzen; anzuzeigen, daß dieser Rest mit dem Divisor noch zu theilen wäre, wie es die gewöhnliche Bezeichnung dieser Rechnungsart erfordert. Demnach wäre $748 : 73 = 10\frac{18}{73}$.

§. 57.

Würden uns endlich noch die Aufgaben gegeben: Aus einem gegebenen zweifachen, oder dreifachen Produkte und einem seiner Faktoren den andern unbekannten zu finden, so dürfen wir nur den gegebenen Faktor im 1sten Fall mit 2, und im anderen mit 3 multipliziren, und mit der entstehenden Größe ins Produkt theilen, so wird jederzeit der Quozient den andern Faktor bestimmen.

Gesetzt, daß das zweifache Produkt die Zahl 24, und dessen einer Faktor 3 gegeben wäre, so setzen wir:

$$2)\frac{3}{6}\left|\begin{matrix}24\\ \underline{24}\end{matrix}\right|4$$ ist also der andere Faktor,

und sprechen: 2 mal 3 giebt 6, in 24 getheilt, giebt 4 zum Quozienten.

Denn da ein zweifaches Produkt nichts anders ist, als ein Produkt zweier Zahlen zweimal genommen, (§. 47.) so können wir uns vorstellen, daß der hier gegebene Dividend entstanden ist, indem man den bekannten Faktor 3 erst mit 2, und mit dieser entstehenden Zahl 6 den unbekannten Faktor 4 multiplizirt hatte; nun ist aber der Dividend ein Produkt des Divisors in dem Quozienten (§. 53.), mithin hier des zweimal so groß gegebenen Faktors in den unbekannten Faktor; und es muß dieser dem gefundenen Quozienten gleich seyn.

Wäre ferner 864 ein dreifaches Produkt, und dessen einer Faktor 36, so setzen wir:

$$3)\frac{36}{108}\left|\begin{matrix}864\\ \underline{864}\end{matrix}\right|8$$ der andere Faktor.

Und sollte 180 ein zweifaches Produkt und 6 ein Faktor desselben seyn; so ist der andere $\frac{180}{2.6}=15$.

Oder 3,36 ein zweifaches Produkt, und 14 der Faktor, so ist $\frac{3{,}36}{14.2}=0{,}12$ der andere.

Wäre hingegen 449,856 ein dreifaches Produkt, und 213 der Faktor; so muß der andere $\frac{449{,}856}{3.213}=0{,}704$ seyn.

Endlich wäre 45,8388 ein dreifaches Produkt, und 7,14 ein Faktor; so ist $\frac{45{,}8388}{3.7{,}14}=2{,}14$ der andere; u. s. w.

§. 56.

§. 58.

Da wir uns nunmehro in jedem gegebenen Exempel unbenannter Zahlen bei dieser Rechnungsart zu helfen wissen; so haben wir noch Rechnungen für benannte Zahlen zu untersuchen, die wir unter folgenden drei Fällen betrachten können:

a. **Eine gegebene Zahl in eine andere höherer Art von gleichem Werthe zu verwandeln.**

b. **Einen bestimmten Theil der gegebenen Zahl zu finden;** und

c. **Was für ein Theil eine Zahl von einer andern gegebenen sey;** wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß sie zu gleichem Gesetze gehören müssen.

Nach dem ersten Fall werde also gefragt: **Wie viel Ruthen, Fuße 2c. enthalten 796″ zwölftheiliges Maß?**

Da wir wissen, daß 12″ = 1′, und 12′ = 1°, (nach §. 19.), so schließen wir, daß 796″ genau so vielmal 12″ als 1′ enthalten müssen, und auf gleiche Art auch, daß die entstehende Menge von Fußen genau so viel Ruthen, als 12′ enthalten, weshalb wir erst die 796″ mit 12 theilen, von welchen der Quozient die in demselben enthaltenen Fuße anzeigt; und theilen wir wiederum den entstandenen Quozienten mit 12, so muß der 2te Quozient offenbar die in diesen Fußen enthaltene Menge Ruthen angeben. Wir setzen demnach:

```
             12
12|796″|66′|5°
   72   60
   --   --
    76   6′
    72
    --
     4″
```

und so finden wir anfangs, daß 796″ = 66′ + 4″; und dann, daß 66′ = 5° + 6′; mithin folgt, daß 796″ = 5° 6′ 4″ beträgt.

Würde ferner gefragt: wieviel Ctr. und ℔ betragen 9474 Loth? so setzen wir ebenfalls

```
        110
32|9474 L.|296 ℔|2 Ctr.
   64      220
   ---     ---
   307      76 ℔
   288
   ---
    194
    192
    ---
     2 Loth
```

und so ist 9474 Loth offenbar = 2 Ctr. 76 ℔ 2 Loth.

Würde dem zweiten Falle gemäß gesagt: man hat 5 Centner 7 ℔ und 12 Loth Pulver empfangen, welches unter 4 Kompagnien so vertheilt werden soll, daß jede gleichviel erhält; so frägt sich: wieviel eine Kompagnie empfange?

Hier sehen wir also bald, daß jede Kompagnie nicht mehr als den 4ten Theil erhalten kann, weshalb man denselben aus der gegebenen Menge folgendermaßen bestimmt. Man theile zuerst mit 4 in 5 Ctr., wo 1 zum Rest bleibt; da aber 1 Ctr. = 110 ℔, so müssen diese zu den vorhandenen addirt, und die entstehende Summe wiederum mit 4 getheilt werden; und sollte auch hier ein Rest bleiben, so verwandelt man ihn zu Lothen (n. §. 49.) addiret diese zu den vorhandenen, und theilet noch zuletzt die entstehende Summe mit 4; so bekommen wir offenbar die Menge Centner, ℔ und Lothe im Quozienten bestimmt, die eine jede Kompagnie erhält. Wir setzen also:

```
4|5 Ct.  7 ℔  12 L.|1 Ct. 29 ℔ 11 L. erhält jede Komp.
 1 = 110
     ---
     117
     ---
        1 = 32
            --
            44
            --
```

Oder:

Oder sagte man: es haben 3 Personen 25 Thl. 16 Gr. 6 Pf. durch ihre Arbeit verdienet, und man frůge: wieviel eine jede davon erhalten můsse? so setzen wir:

3 | ~~2~~~~5~~ Thl. 16 Gr. 6 Pf. | 8 Thl. 13 Gr. 6 Pf.
1 = 24
4~~0~~
1 = 12
~~1~~8

Sollte endlich, dem dritten Falle gemåß, gefragt werden: der wievielste Theil ist 8′ 9″ 11‴ von 44′ 1″ 7‴ nach zwölftheiligem Maß? so theilet man mit dem höchsten Theile des Divisors in den höchsten Theil des Dividenden, multiplizirt mit dem entstehenden Quozienten den ganzen Divisor, von dessen niedrigstem Theile anfangend, und ziehet das dadurch erhaltene Produkt vom Dividenden ab.

Wir setzen demnach:

8′ 9″ 11‴ | 44′ 1″ 7‴ | 5
44 1 7

und sprechen: 8′ ist in 44′, 5mal enthalten, 11‴.5 = 55‴ = 12‴4+7‴ = 4″ + 7‴, setzen die 7‴ hin; ferner geben 9″ 5 = 45″ zu welchen die vorhin erhaltenen 4″ genommen, 49″ oder 12″.4 + 1″ = 4′ und 1″ bestimmen, davon 1″ hingesetzt wird; endlich giebt das Produkt 8′.5 = 40′, mithin 40′ + 4′ = 44′ die ebenfalls hingesetzt werden. Ziehen wir nun das erhaltene Produkt vom Dividenden ab; so bleibt kein Rest, und wir erkennen, daß 8′ 9″ 11‴ von 44′ 1″ 7‴ der 5te Theil ist.

Auf

Auf ähnliche Art verfahren wir, wenn gefragt würde: Wieviel Personen müssen es seyn, wenn von 388 Thl. 16 Gr. eine jede 48 Thl. und 14 Gr. erhalten soll?

Nemlich wir setzen:

48 Thl. 14 Gr.	388 Thl. 16 Gr.	8 Personen
	388 ⸗ 16 ⸗	

und sagen: 388 : 48 = 8, 14 Gr. . 8 = (12 + 2) Gr. . 8 = 4 Thl. 16 Gr., setzen 16 Gr. hin; ferner: 48 Thl. . 8 = 384 Thl., 384 Thl. + 4 Thl. = 388 Thl. u. s. w.

§. 59.

Da wir nun alle mögliche Aufgaben dieser Rechnungsart auflösen können, so nehmen wir endlich folgende zwei Grundsätze an, welche mit den schon bekannten (§. 21. u. 35.) vereiniget werden, als:

h. **Gleiche Größen mit gleichen Größen multiplizirt, oder dividirt, geben gleiche Größen.**

Da also $24 + 12 = 40 - 4$
und $6 = 6$

so folgt, daß $(24 + 12) . 6 = (40 - 4) . 6$
oder $24 . 6 + 12 . 6 = 40 . 6 - 4 . 6$
mithin $144 + 72 = 240 - 24 = 216$ ist.

Oder auch weil $36 + 12 = 72 - 24$
und $6 = 6$

so ist auch $(36 + 12) : 6 = (72 - 24) : 6$
oder $36 : 6 + 12 : 6 = 72 : 6 - 24 : 6$
folglich $6 + 2 = 12 - 4 = 8$.

i. Hingegen: **Gleiche Größen mit ungleichen Größen multiplizirt oder dividirt, und so umgekehrt, geben ungleiche Größen.**

da 24

Da $24 + 12 = 40 - 4$
und $6 > 4$

so muß $24.6 + 12.6 > 40.4 - 4.4$
oder $144 + 72 > 160 - 16$
mithin $216 > 145$ seyn;

Und umgekehrt, da $56 > 49$
und $7 = 7$

so folgt, daß $56.7 > 49.7$
d. h. $392 > 343$ ist.

Oder weil $24 + 12 = 40 - 4$
und $6 > 4$

so ist auch $(24 + 12):6 < (40 - 4):4$
oder $24:6 + 12:6 < 40:4 - 4:4$
mithin $4 + 2 < 10 - 1$
d. h. $6 < 9$
Endlich da $56 < 49$
und $7 = 7$

so folgt, daß $56:7 > 49:7$
d. h. $8 > 7$ ist.

§. 60.

So wichtig es war, daß man eine Rechnung kennen lernte, wodurch eine schon in der Addizion oder Subtrakzion geschehene berichtiget, und darum deren Probe genannt wurde (§. 36.); eben so nöthig ist es, daß wir auch in den letztern beiden Rechnungsarten eine dergleichen Rechnung zu führen, oder ihre Probe zu machen wissen, welches dadurch erhalten wird, daß man die entgegen gesetzte Rechnungsart geradezu bei den bestimmten Größen anwendet; daher folgende beide Regeln zu bemerken sind:

a. **Will man wissen, ob man ein richtiges Produkt zweier Zahlen bestimmt habe, so theile man mit dem einen Faktor in dasselbe, worauf offenbar**

dar der Quozient den andern angeben muß, weil der Dividend ein Produkt des Divisors und Quozienten seyn soll (nach §. 52.)

Wäre demnach 432 . 12 = 5184, so ist auch 5184 : 12 = 432 ꝛc.

b. Soll man aber bestimmen: ob ein Quozient richtigen Werth habe, so darf man ihn nur wieder mit dem Divisor multipliziren, so muß ebenfalls das Produkt dem Dividenden gleich seyn; und sollte man nicht genau den Quozienten haben bestimmen können, so addirt man noch zum gefundenen Produkt, den gebliebenen Rest.

Ist demnach 49368 : 12 = 4114, so ist auch 4114 . 12 = 49368.

Oder wäre 748 : 73 = $10\frac{18}{73}$ (nach §. 56.) so ist (73 . 10) + 18 = 748 ꝛc. ꝛc.

§. 61.

Endlich, weil auch in dieser Rechnungsart Hülfsmittel vorhanden sind, durch die man eine Rechnung leichter bestimmen kann, so wollen wir uns die vorzüglichsten derselben hiemit bekannt machen. Wäre also:

a. Der Divisor ein Produkt zweier Zahlen, so dividirt man zuerst mit der einen in den gegebenen Dividenden, und die entstehende Zahl nachher mit dem andern Faktor: denn durch die erstere Rechnung hat man eigentlich den Divisor und Dividenden, um gleichvielmal kleiner gemacht, wodurch der Werth des Quozienten in nichts verändert werden konnte. (nach §. 41.)

Also ist:

$$3852 : 18 = \frac{3852}{18} = \frac{3852}{6 . 3} = \frac{1284}{6} = 214$$

Ferner $25536 : 24 = \frac{25536}{4 . 6} = \frac{6384}{6} = 1064.$

b. Ver-

b. Verstatten die Zahlen nicht vorigen Vortheil, so sucht man den Quozienten gewöhnlichermaßen, setzet aber nicht die aus dessen Theilen und dem ganzen Divisor entstehenden Produkte unter die getheilten Zahlen, sondern blos die entstehenden einzelnen Reste, indem man die einzelnen Produkte der Theile des Quozienten in die Theile des Divisors machet, und sogleich von den Zahlen der Stelle des Dividenden abziehet, worinnen sie endigen.

Wäre z. E. 48914:37 gegeben, so setzen wir:

37 | 48914 | 1322
  119
  81
  74

und sagen, nachdem ein Strich unter die zu theilende Zahl gezogen ist: 3 in 4 giebt 1, 1 mal 7 ist 7 von 8 bleibt 1, die wir unter 8 setzen, und 1 mal 3 giebt 3 von 4 bleibt 1, welche wir unter die 4 bringen; also wäre hier der Rest 11 von der getheilten Zahl 48, und dem Produkt 1.37. Rücken wir nun zu demselben die nächste Ziffer 9, so erhalten wir 119 zu theilen, ziehen unter dieser Zahl einen Strich, und sprechen: 3 in 11 giebt 3, 3 mal 7 ist 21, und weil hier 21 von 9 nicht abgezogen werden kann, so vermehren wir in Gedanken die 9 um 2 Einheiten der nächst höhern Stelle, wo wir denn sagen können: 21 von 29 läßt 8 zum Rest; die wir unter die 9 stellen, und 3 mal 3 ist 9, welche wir in Rücksicht der vorigen, um die 2 Einheiten eben dieser Stelle vermehrten Zahl, von welchen der Abzug geschahe, wiederum vermehren müssen, damit der wahre Rest zwischen der getheilten Zahl und dem Produkte entstehen kann; also sagen wir: 9 und 2 macht 11, von 11 bleibt nichts, und so ist 8 der Rest, zwischen 119 und 3.37. Rücken wir ferner die nächste Ziffer 1 zu selbigem, so entstehen 81, unter der von neuem ein Strich

gezogen wird, und sprechen: 3 in 8 giebt 2, 2 mal 7 ist 14, von 1 geht nicht, mithin 14 von 21 läßt 7, (wo wir die obere Zahl um 2 Einheiten der nächst höhern Stelle, wie vorhin, vermehren,) und 2 mal 3 ist 6 und die 2 Einheiten ist 8, von 8 läßt nichts; endlich rücken wir die nächste Ziffer 4 herunter, und sprechen 3 in 7 giebt 2, 2 mal 7 ist 14 von 14 läßt nichts, und 2 mal 3 ist 6 zu der die vermehrte Einheit genommen 7 giebt, die von 7 abgezogen, nichts zum Rest läßt, also ist 1322 der verlangte Quozient.

Da diese Behandlungsart bei allen möglichen Zahlen angewendet werden kann, und während der Rechnung eine eben so leichte Uebersicht, als die gewöhnliche erlaubet, auch der durch sie erhaltene Vortheil, nemlich, die Hälfte der hinzusetzenden Ziffern zu ersparen, bei einer großen Zahl sehr beträchtlich wird; so kann derselbe nicht genug anempfohlen werden. So wird uns dieser Vortheil schon einleuchtender, wenn wir den Ausdruck 3400987643 : 24093 bis auf 1 Tausendtheilchen auflösen, wo wir setzen:

24093|3400987643|141160,82
99168:...
27967...
38746..
146534:
19763,0
488,60
67,40

und also offenbar 88 hinzusetzende Ziffern ersparen.

c. Sind sehr große Zahlen gegeben, so thut man wohl, zuerst von dem Divisor, wie oben vom Multiplikator (§. 50. e) ein Produkten-Täfelchen anzuordnen, nach welchem man sogleich beurtheilen kann, wie oft jede zu theilende Zahl

dem

dem Divisor enthält, und übrigens, wie vorher, zu verfahren.

Wäre demnach 11420557390629398854 25: 4832095 gegeben; so ist

```
1) 4832095
2) 9664190
3)14496285
4)19328380
5)24160475
6)28992570
7)33824665
8)38656760
9)43488855
```

und wir setzen:

```
4832095 | 114205573906293988542 5 | 23634794826321 5
             17563673
              30673889
               16813190
                23169056
                 38406762
                  45820979
                   23321243
                    39928639
                     12718798
                      30546088
                       15535185
                        10389004
                          7248142
                         24160475
```

und sprechen: 4 in 11 giebt 2, mithin 2.4832095 in der zweiten Reihe giebt 9664190, folglich 0 von 7 läßt 7, 9 von 15 läßt 6, 2 von 5 läßt 3 u. s. w.

Bayerische Staatsbibliothek München

d. Endlich können wir auch den Quozienten bis zu einer bestimmten zehntheiligen Stelle verlangen, wie es bei geometrischer Bestimmung oft geschiehet, wo wir nach und nach die niedrigsten Ziffern des Divisors folgendermaßen wegstreichen können.

Gesetzt, daß der Ausdruck 564326 : 358742 aufzulösen wäre; so können wir nach voriger Art setzen:

```
358742 | 564326,000 | 1,573
         205584,0
          26214,00
           1102,060
             25,1734
```

Hingegen auch:

```
358742 | 564326 | 1,573
         205584
          26214
           1105
             25
```

wo wir sprechen: 3 in 5 ist 1 mal enthalten, und 1 mal 358742 von 564326 weggenommen, läßt zum Rest 205584. Statt nun diesem Rest Nullen anzuhängen, lassen wir ihn unverändert, und vermindern dagegen den Divisor um die niedrigste Ziffer 2, welches wir mit dem Strich anzeigen, wodurch wir offenbar in folgendem einzelnen Produkte eine Ziffer weniger als vorhin erhalten müssen; demnach sagen wir: 3 in 20 ist 5 mal enthalten, setzen die 5 als Zehntheile im Quozienten, und sprechen: $5 \cdot 35874 = 179370$, die von 205584 abgezogen, 26214 zum Rest lassen. Ferner durchstreichen wir vom Divisor die Ziffer 4, und sprechen: 3 in 26 ist 7 mal enthalten, $7 \cdot 3587 = 25109$, von 26214 abgezogen, giebt den Rest 1105. Endlich durchstreichen wir die Ziffer 7, und sprechen: 3 in 11

ist

ist 3 mal enthalten, u. s. w. und so sehen wir ebenfalls auf diese Weise denselben Quozienten entstehen.

Eben so würden wir bei 34,5387 : 5634 bis auf Hunderttausendtheilchen den wahren Quozienten bestimmen, wenn wir setzen:

$$
\begin{array}{r|l|l}
5634 & 34{,}5387 & 0{,}00613 \\
\hline
 & 7347 & \\
\hline
 & 1713 &
\end{array}
$$

Da wir jetzt hinreichend wissen, wie die unbenannten und benannten Zahlen bei den verschiedenen Rechnungsarten ihren Gesetzen gemäß zu behandeln sind; so wollen wir nunmehr die Eigenschaften anderer Zahlen kennen zu lernen suchen, welche sowohl **gebrochene Zahlen** als auch **Brüche** genannt werden.

Dritte Abtheilung.

Von den Eigenschaften der gebrochenen Zahlen oder Brüche, und deren vier Rechnungsarten.

Erster Abschnitt.

Von den Eigenschaften der Brüche.

§. 62.

Eine gebrochene Zahl, oder ein Bruch, ist eine Größe, deren Werth entweder kleiner oder grösser, als Eins, oder als irgend eine ganze Zahl ist.

Dieser Erklärung zufolge, unterscheiden sich also diese Größen von allen andern dadurch, daß sie nicht die Einheit, oder Eins, noch weniger eine ganze Zahl genau enthalten.

Um uns deren Entstehung vorzustellen, nehmen wir wiederum die Einheit an, aus deren Zusammensetzung die ganzen Zahlen entstanden, (§. 4.) theilen sie in eine beliebige Menge gleicher Theile, wie bisher in der Division ganzer Zahlen geschehen, und geben denselben verschiedene Benennungen, weil sie jeden beliebigen Werth haben können. Demnach mögen die Theile der Einheit, welche in drei gleiche Theile getheilet wird, Drittel; die in vier gleiche Theile getheilet ist, Viertel; die in fünf gleiche Theile getheilet ist, Fünftel u. s. w. heißen. Eben so würde auch jeder Theil eines Thalers, der in drei gleiche Theile wäre getheilet worden, ein drittel Thaler; ein Theil eines Pfundes, was in zwei gleiche Theile getheilet wäre, ein zweitel Pfund

Pfund, oder kürzer, ein halb Pfund genannt werden müssen; u. s. w.

§. 63.

Diese Größen nun zu bezeichnen, bedarf man offenbar zwei Ziffern; die eine, anzuzeigen: in wieviel Theile die Einheit ist getheilet worden, wornach die entstandenen Theile ihre Benennung erhalten, weshalb wir sie den Nenner nennen; die andere, um die Menge der in der Größe enthaltenen Theile anzuzeigen, oder wieviel Theile zusammen genommen, oder zusammen gezählet sind, weshalb sie der Zähler heißen mag. Beide setzt man also untereinander, daß der Zähler oben, und der Nenner unten steht, und trennet sie mit einem Strich.

So heißen demnach folgende Größen oder Brüche

$\frac{1}{2}$ ein Halbes, oder ein Zweitel, $\frac{1}{4}$ ein Viertel

$\frac{1}{3}$ ein Drittel $\frac{1}{5}$ ein Fünftel u. s. w.

Ferner $\frac{2}{5}$ ℔ zweifünftel ℔, $\frac{3}{4}$ Thl. dreiviertel Thl. u. s. w.

Oft werden auch Zähler und Nenner eines Bruchs, wie künftighin geschehen wird, seine Glieder genannt.

§. 64.

Ehe wir nun zur nähern Betrachtung ihrer Eigenschaften treten, wollen wir sie in folgende zwei Gattungen eintheilen:

a. Haben die Brüche einen kleinern Werth als die Einheit, wo also die Zähler kleiner als die Nenner sind, so mögen sie ächte Brüche *) heißen.

*) Sie werden sonst auch eigentliche, wahre, oder reine Brüche genannt.

So müssen zu dieser Gattung $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$; wie auch $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}$, oder $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{9}{11}$ u. s. w. gehören. Hier können wir uns erinnern, daß sämtliche zehntheilige Zahlen einen kleinern Werth als die Einheit haben (§. 13.), auch darum unter diese Klasse mitgehören, und mehrentheils zehntheilige Brüche genannt werden. Um uns aber dieselben vorzustellen, dürfen wir nur stets dem Nenner 1 und eine beliebige Menge Nullen geben.

Also ist $0{,}1 = \frac{1}{10}$; $0{,}5 = \frac{5}{10}$; $0{,}07 = \frac{7}{100}$; $0{,}009 = \frac{9}{1000}$; ferner $0{,}12 = \frac{12}{100}$; $0{,}375 = \frac{375}{1000}$; $0{,}2174 = \frac{2174}{10000}$ u. s. w. die wir sämtlich nach der gegebenen Erklärung (§. 63.) genau so, wie bisher gewöhnlich mit Worten ausdrücken.

b. Haben die Brüche aber einen größern Werth als die Einheit, wo also die Zähler größer als die Nenner sind, so mögen sie unächte *) Brüche genannt werden.

So gehören zu dieser Gattung $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}$; wie $\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}$ oder $\frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}$ u. s. w.; wie auch $\frac{11}{10}, \frac{34}{10}, \frac{5132}{100}, \frac{63445}{1000}$ u. s. w. von welchen diese letztern nach der Ordnung 1,1; 3,4; 51,32; 63,445 vorstellen. Sollte man bei der Vorstellung dieser Brüche fragen: wie es möglich sey, daß nach der gegebenen Erklärung von

*) uneigentliche, falsche, oder vermischte Brüche.

von der Entstehung eines Bruchs (§. 62.) ein Zähler mehr Theile haben könne, als die Einheit, deren Menge doch der Nenner anzeiget? so kann man antworten: daß man sich vorstellen müsse, daß nicht blos eine sondern mehrere Einheiten in eine gleiche Menge getheilet, und von ihnen eine beliebige Menge genommen worden sey.

Uebrigens hat man auch noch **gebrochene Brüche**, deren beide Glieder selbst entweder Brüche, oder eines derselben eine ganze Zahl oder Eins ist. So z. E. würden es $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}$, $\frac{4}{\frac{2}{5}}$ und $\frac{\frac{8}{25}}{7}$ seyn.

§. 65.

Da die Brüche nach den uns von ihnen gegebenen Begriffen (§. 62.) die Eigenschaft haben müssen, daß ihre Zähler die Nenner nicht genau enthalten; so folgt ganz natürlich, daß die Größen, deren Nenner im Zähler genau enthalten sind, entweder blos 1, oder jede andere beliebige Zahl unter der Gestalt eines Bruchs vorstellen. So geben uns z. E. $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}$ u. s. w. $\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}$ u. s. w. $\frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}$ u. s. w. blos die Größen 1, 2, 3 u. s. w. zu erkennen, weil die Zähler ihre Nenner d. h. die Menge aller Theile der Einheit 1 mal, 2 mal, 3 mal u. s. w. genau enthalten, welches sich offenbaret, sobald die Zähler mit den Nennern getheilt werden.

Umgekehrt folgt hieraus; daß einer jeden Zahl, ohne Nachtheil ihres Werths, die Gestalt eines Bruchs aller beliebigen Nenner gegeben wird, wenn man sie mit dem verlangten Nenner multiplizirt, und das entstehende Produkt zu seinem

Zähler nimmt. Demnach ist $13 = \frac{13 \cdot 3}{3} = \frac{39}{3}$; $5 = \frac{5 \cdot 4}{4} = \frac{20}{4}$; $8 = \frac{8 \cdot 10}{10} = \frac{80}{10} = 8{,}0$ u. s. w.

§. 66.

Denken wir dem vorigen weiter nach, so wird uns klar, daß aus einem unächten Bruche die Zahl, oder die Einheit, samt dessen Menge Theile gefunden werden müsse, wenn wir den Zähler mit dem Nenner theilen, und dem vom Zähler übrig bleibenden Reste, eben denselben Nenner geben, weil dieser Rest die übriggebliebenen Theile des Bruches anzeiget:

Diesem zufolge sind also $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$; $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$; $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$; $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$; $\frac{11}{10} = 1\frac{1}{10} = 1{,}1$; $\frac{132}{100} = 1\frac{32}{100} = 1{,}32$; und $\frac{3445}{1000} = 3\frac{445}{1000} = 3{,}445$ u. s. w.

Und wieder umgekehrt: daß eine ganze mit einem Bruch verbundene Zahl, in einen unächten Bruch verwandelt werde, wenn man dieselbe mit dem Nenner des Bruchs multiplizirt, zum entstehenden Produkt dessen Zähler addiret, und dieser Summe den Nenner giebt.

Also ist $3\frac{3}{4} = \frac{(3 \cdot 4) + 3}{4} = \frac{12 + 3}{4} = \frac{15}{4}$; und $7\frac{2}{5} = \frac{(7 \cdot 5) + 2}{5} = \frac{35 + 2}{5} = \frac{37}{5}$; endlich $8\frac{1}{6} = \frac{(8.6) + 1}{6} = \frac{48 + 1}{6} = \frac{49}{6}$ u. s. w.

§. 67.

Da wir nun dem vorigen §. gemäß immer den Zähler eines unächten Bruchs durch den Nenner theilen müssen, um die in ihm enthaltene Zahl und Theile zu finden; so ist klar, daß wir auch bei demselben den Zähler wie Dividenden, den Nenner wie Divisor, und ihn selbst als Quozienten betrachten können, weil die nach geschehener Theilung erhaltene Größe ihm selbst gleich ist.

Daß wir aber auch bei ächten Brüchen diese entstehende Vorstellung annehmen können, wird uns folgendermaßen einleuchtend. Gesetzt, daß $\frac{3}{4}$ gegeben wären, und wir betrachten 3 als Dividenden, und 4 als Divisor; so würde nunmehro $\frac{3}{4}$ selbst den 4ten Theil von 3 anzeigen (nach §. 52.), welches dem oben (§. 62.) gegebenen Begriffe eines Bruchs keinesweges entgegen ist. Denn nehmen wir 3, und theilen sie in ihre Einer, so erhalten wir 1 + 1 + 1 oder 3 Einer; da es nun gleich ist, ob wir von der Zahl 3, oder von den 3 Einern den 4ten Theil nehmen, so ist klar, weil der 4te Theil von 1 offenbar $\frac{1}{4}$ ist, daß wir von 3 Einer 3mal soviel, mithin 3mal $\frac{1}{4}$ d. h. $\frac{3}{4}$, oder den 4ten Theil von 3 erhalten müssen.

So können wir auch bei $\frac{7}{8}$ ℔ sprechen; man rechne in dieser Größe den achten Theil von 7 ℔; oder man habe 1 ℔ in 8 Theile getheilet, und 7 derselben genommen.

Demnach erhellet ferner, daß jederzeit aus zwei gegebenen Zahlen der Quozient genau bestimmt wird,

 wenn

wenn man den Rest des Dividenden im Quozienten als Zähler, und den Divisor als Nenner anhängt, wie solches bei dem Quozienten $10\frac{18}{73}$ (§. 56.) geschahe, den wir daselbst zuvor durch Näherung bestimmt hatten; daher ist von nun an letzteres nicht schlechterdings nothwendig, sondern muß nach Beschaffenheit der in den Rechnungen vorkommenden Größen beurtheilt werden, wo oft gegenwärtige Bestimmung des Quozienten vortheilhafter ist.

§. 68.

Um die Eigenschaften der Brüche näher kennen, und ihrem Werthe gemäß mit einander vergleichen zu lernen, machen wir folgende Betrachtung.

Da die Theile einer Größe kleiner und kleiner werden müssen, in je mehrere Theile dieselbe getheilet wird; so folgt, daß von denen Brüchen, welche gleiche Zähler, oder verschiedene Nenner haben, diejenigen einen geringern Werth enthalten, deren Nenner größer sind.

Es ist also $\frac{3}{3} > \frac{2}{6} > \frac{2}{9} > \frac{2}{12} > \frac{2}{15}$ u. s. w.

Vergleichen wir aber jetzt mit dem Nenner des ersten Bruchs, die Nenner aller übrigen, so sehen wir, daß die letzteren 2 mal, 3 mal u. s. w. größer sind, als der erste, und folglich ist klar, daß auch die Theile ihrer Brüche 2 mal, 3 mal u. s. w. so klein seyn müssen, als die Theile des ersten Bruchs. Weil aber auch sämtliche Brüche, wegen ihrer gleichen Zähler, eine gleiche Menge Theile enthalten; (§. 63.) so folgt, daß letztere dem Werthe und der Ordnung nach 2 mal, 3 mal u. s. w. so klein seyn müssen, als der erste Bruch. Wir können demnach annehmen:

Einen

Einen Bruch 2, 3 mal ꝛc. kleiner zu machen, multiplizire man seinen Nenner mit 2, 3 u. s. w. und lasse den Zähler unverändert.

Sollte man also aus $\frac{3}{4}$ einen 5 mal kleinern Bruch bestimmen, so setzen wir: $\frac{3}{4.5} = \frac{3}{20}$.

Oder sollte $\frac{5}{7}$ ein 6 mal kleinerer Bruch werden, so setzen wir: $\frac{5}{7.6} = \frac{5}{42}$.

Endlich sollte $\frac{12}{11}$ ein 7 mal kleinerer Bruch werden, so setzen wir: $\frac{12}{11.7} = \frac{12}{77}$ u. s. w.

§. 69.

Da umgekehrt unläugbar ist, daß die Theile einer Größe immer größer und größer werden, in je weniger Theile dieselbe eingetheilet wird; so folgt, daß

$$\frac{3}{60} < \frac{3}{30} < \frac{3}{20} < \frac{3}{15} < \frac{3}{12} \text{ u. s. w.}$$

Und vergleichen wir hier wiederum die Nenner mit dem Nenner des ersten Bruchs, so erkennen wir, daß sie 2 mal, 3 mal u. s. w. kleiner, mithin die Theile ihrer Brüche 2 mal, 3 mal u. s. w. größer sind, als die Theile des ersten Bruchs; und endlich, weil sämmtliche Brüche, wegen ihrer gleichen Zähler, eine gleiche Menge Theile enthalten, so folgt, daß hier die letztern der Ordnung und dem Werthe nach 2 mal 3 mal u. s. w. größer sind, als der erste; weshalb wir festsetzen können:

Einen

Einen Bruch beliebigemal größer zu machen, theile man den Nenner mit der gegebenen Zahl, und lasse den Zähler unverändert.

Sollte demnach der Bruch $\frac{5}{6}$, 3 mal so groß gemacht werden; so setzen wir $\frac{5}{6} : 3 = \frac{5}{2}$; oder $\frac{5}{12}$, 4 mal so groß, so setzen wir $\frac{5}{12} : 4 = \frac{5}{3}$; oder $\frac{5}{30}$, 5 mal so groß, so ist es $\frac{5}{30} : 5 = \frac{5}{6}$ u. s. w.

§. 70.

So leicht wir bisher den Werth der Brüche nach der Größe ihrer Nenner bestimmten; eben so leicht können wir es auch nach der Größe ihrer Zähler. Denn nehmen wir, in der Ueberzeugung, daß eine Größe um soviel größer sey, je mehr Theile einer Art sie enthalte, folgende Brüche an, welche verschiedene Zähler, aber gleiche Nenner haben; so ist $\frac{60}{36} > \frac{30}{36} > \frac{20}{36} > \frac{15}{36} > \frac{12}{36} > \frac{10}{36}$ u. s. w.

Und vergleichen wir hier den ersten Bruch mit den übrigen, so finden wir, daß der Zähler des 2ten 2 mal so klein, des 3ten 3 mal so klein ꝛc. als der Zähler des ersten ist; da nun aber ihre Nenner gleich sind, so müssen dieselben gleiche Theile enthalten (§. 63.), und mithin folgt, daß der Werth des ersten Bruchs 2 mal, 3 mal ꝛc. ꝛc. so groß, als der Werth des 2ten, 3ten ꝛc. Bruchs ist, nach welchem wiederum erhellet:

Einen Bruch beliebigemal kleiner zu machen, theile man den Zähler mit der gegebenen Zahl, und lasse den Nenner unverändert.

Sollte

Sollte also $\frac{32}{5}$, 8 mal kleiner gemacht werden, so setzen wir $\frac{32:8}{5} = \frac{4}{5}$; oder wäre aus $\frac{30}{7}$ ein 5 mal kleinerer Bruch zu bestimmen, so setzt man $\frac{30:5}{7} = \frac{6}{7}$ u. s. w.

§. 71.

Und da wir hingegen umgekehrt schließen können: daß der erste Bruch der vorigen Reihe darum 2, 3, 4 mal so groß, als der 2te, 3te und 4te Bruch hat seyn müssen, weil sein Zähler 2, 3, 4 mal so groß ist, so folgt:

Einen Bruch beliebigemal größer zu machen, muß man dessen Zähler mit der gegebenen Zahl multipliziren, und den Nenner unverändert lassen.

Sollte demnach $\frac{2}{3}$, 3 mal so groß gemacht werden, so setzen wir $\frac{2 \cdot 3}{3} = \frac{6}{3} = 2$; oder $\frac{7}{18}$, 5 mal so groß, so wird es $\frac{7 \cdot 5}{18} = \frac{35}{18}$ seyn; u. s. w.

§. 72.

Da es ferner ein förmlicher Widerspruch seyn würde, zu behaupten: daß der Werth einer Größe sich verändere, wenn sie beliebigemal größer, und zugleich eben sovielmal kleiner gemacht wird; so ergiebt sich von selbst, zufolge der vorigen vier Paragraphen: **Daß ein Bruch, seinem Werthe nach, sich in** nichts

nichts verändere, wenn dessen Glieder mit gleichen Zahlen multiplizirt oder dividirt werden.

Hätten wir also den Bruch $\frac{3}{4}$, und multiplizirten dessen Glieder mit 2, 3, rc. so würden die entstehenden neuen Brüche mit ihnen gleichen Werth haben.

Folglich ist $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4}$ u.s.w.

d. h. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16}$ u. s. w.

Und eben so muß $\frac{48}{64} = \frac{48:2}{64:2} = \frac{48:4}{64:4} = \frac{48:8}{64:8}$ u.s.w.

d. h. $\frac{48}{64} = \frac{24}{32} = \frac{12}{16} = \frac{6}{8}$ u. s. w.

seyn.

§. 73.

Endlich können wir auch einen Bruch ohne Nachtheil seines Werths in einen anderen von beliebiger Benennung verwandeln, wenn man dessen Zähler mit dem verlangten Nenner multiplizirt, das entstehende Produkt mit des Bruches Nenner dividirt, und den erhaltenen Quozienten zum Zähler des verlangten Bruchs macht.

Wollte man demnach $\frac{3}{4}$ in einen Bruch von gleichem Werth verwandeln, dessen Nenner 36 seyn sollte, so setzen wir:

Weil $\frac{3 \cdot 36}{4} = \frac{108}{4} = 27$; so muß $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$ seyn.

Uns hiervon zu überzeugen, schließen wir: dem vorigen §. zufolge ist $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 36}{4 \cdot 36} = \frac{108}{4 \cdot 36}$; ferner, wenn wir beide Glieder mit 4 theilen $\frac{108}{4 \cdot 36} = \frac{27}{1.36} = \frac{27}{36}$.

Eben

Eben also ist $\frac{2}{3} = \frac{2.27}{3.27} = \frac{18}{27}$ u. s. w.

Ferner $\frac{1}{8} = \frac{1.1000}{8.1000} = \frac{125}{1000} = 0{,}125$; wie auch $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{3}{8} = 0{,}375$; $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{5}{8} = 0{,}625$; $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{7}{8} = 0{,}875$ u. s. w.

Diese letztern Größen sind wohl zu merken, weil wir gelegentlich zeigen werden, wie sie sowohl bei der Multiplikazion als Division mit großem Vortheil zu gebrauchen sind, wenn eine der gegebenen Zahlen entweder 125; oder 1,25; oder 12,5 ꝛc. ꝛc. oder auch 25; oder 375 ꝛc. ꝛc. ist.

§. 74.

Weil nun Größen nach ihrem Werthe leicht verglichen werden können, wenn sie eine gewisse Aehnlichkeit haben, so sind diejenigen Brüche leicht zu beurtheilen, bei denen gleiche Nenner angetroffen werden, weil dann nur ihre Zähler in Erwägung gezogen werden dürfen. Deshalb sind wir genöthiget, folgende Aufgabe aufzulösen:

Zwei oder mehrere Brüche von verschiedenen Nennern, in Brüche von gleichen Nennern zu verwandeln, welches man geradezu auch so ausdrückt: Brüche auf gleiche Benennung zu bringen.

Diesen Zweck zu erreichen, **multiplizire man die Glieder eines jeden Bruchs mit den Nennern der andern Brüche.**

Würden also die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ in dieser Absicht gegeben; so geben die Glieder des Bruchs $\frac{2}{3}$, mit

des andern Bruches Nenner 4 multiplizirt, den Bruch $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$; und hingegen $\frac{3}{4}$, mit des ersten Bruchs Nenner 3 multiplizirt, den Bruch $\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$; und so erhielten wir die Brüche $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$ statt der gegebenen $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$, ohne deren Werth verändert zu haben, welches dem 72sten §. gemäß, einleuchtend ist, und also keines Beweises bedarf.

Würde aber auch gefragt: welcher von den Brüchen $\frac{3}{2}$ und $\frac{3}{4}$ größer als der andere sey? so würden wir antworten: $\frac{3}{4}$; weil $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$ ist.

Und sollte man bestimmen, um wie viel $\frac{3}{4}$ größer, als $\frac{2}{3}$ sey? so würden wir antworten: um $\frac{1}{12}$; weil der Zähler 9 von $\frac{9}{12}$ um 1 größer, als der Zähler 8 von $\frac{8}{12}$ ist.

Wären ferner die Brüche $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$ in gleicher Absicht gegeben, so setzten wir: $\frac{2 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 7}$, $\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 7}$, $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 5 \cdot 4}$; und multipliziren wir die Faktores, so folgt, daß von $\frac{56}{140}$, $\frac{105}{140}$, $\frac{120}{140}$ der erste $\frac{56}{140}$, mithin auch der erste Bruch $\frac{2}{5}$ der kleinste der gegebenen Brüche sey.

§. 75.

So sicher das vorige Verfahren ist, Brüche auf gleiche Benennung zu bringen, so wenig anwendbar ist es, wenn eine große Menge gegeben wird, und man eine weitläuftige Rechnung vermeiden, auch keine solche Brüche erhalten soll, die noch auf eine kleinere gleiche Benennung gebracht werden können. Man dachte dieserhalb auf eine Verkürzung, und fand sie in folgender Regel.

Man setze die Nenner der gegebenen Brüche in eine Reihe nebeneinander, prüfe, ob etliche von ihnen entweder 2, 3, 5 und 11, oder jede andere Zahl genau enthalten, theile sie mit derselben, und setze die entstehende Quozienten samt den ungetheilten Zahlen unter die gegebene Zahlen als zweite Reihe. Mit den Zahlen von dieser, wie mit allen nachher entstehenden, beobachte man ein gleiches Verfahren, bis man auf solche Zahlen kömmt, die solches nicht mehr verstatten. Hierauf formire man von diesen letztern und den gebrauchten Divisoren ein Produkt, nehme es zum gemeinschaftlichen Nenner der neuen Brüche, theile es mit den Nennern der gegebenen, und multiplizire mit den nach und nach entstehenden Quozienten die zustimmende Zähler; so geben diese Produkte die Zähler der neuen Brüche, welche den gegebenen gleich sind.

Würden demnach die Brüche $\frac{7}{15}, \frac{13}{20}, \frac{16}{21}$ gegeben, so setzen wir:

die Nenner	und die Brüche
5) 15 . 20 . 21	$\frac{7}{15}, \frac{13}{20}, \frac{16}{21}$ (5.3.4.7 = 420
3) 3 . 4 . 21	$\frac{196}{420}, \frac{273}{420}, \frac{320}{420}$
1 . 4 . 7	

und

und sprechen: weil 15 und 20 die 5 genau enthalten, (§. 44.) $15:5=3$ und $20:5=4$; mithin bekommen wir zur zweiten Reihe die Zahlen 3.4.21. Ferner bei dieser: $3:3=1$ und $21:3=7$; also erhalten wir zur dritten Reihe die Zahlen 1.4.7, welche unverändert bleiben müssen, weil 4 und 7 keine Zahl gemeinschaftlich enthalten. Nun geben diese Zahlen mit den gebrauchten Divisoren das Produkt $5.3.4.7=420$; theilen wir es also mit den Nennern 15, 20 und 21, so entstehen die Quozienten 28, 21 und 16; und multipliziren wir mit diesen die Glieder der gegebenen Brüche, so entstehen die neuen Brüche $\frac{196}{420}$, $\frac{273}{420}$, $\frac{320}{420}$, welche (nach §. 72.) den vorigen völlig gleich sind.

Der Grund, worauf diese gegebene Regel beruhet, bestehet darinnen: daß von zwei oder mehreren Zahlen eine jede nicht allein in dem aus ihnen entstehenden Produkte, sondern auch in dem Produkte der verschiedenen Faktoren genau enthalten ist, in welche die Zahlen selbst zerleget werden können. Denn nehmen wir z. B. die Zahlen 6 und 8, so ist ihr Produkt $6.8=2.3.2.4=48$, mithin auch $\frac{6.8}{2}=\frac{2.3.2.4}{2}=\frac{48}{2}$, oder $3.8=6.4=3.2.4=24$. Wir können aber dieses letztere Produkt 3.2.4 entweder als ein vierfaches Produkt von $3.2=6$, oder als ein dreifaches von $2.4=8$ nehmen (§. 47.) also ist auch 8 wie 6 in ihm genau enthalten. Auf eine ähnliche, wiewohl umständlichere Art, kann man sich davon bei mehreren Zahlen überzeugen.

Es kam also eigentlich bei den Nennern gegebener Brüche darauf an, diejenigen einfachen Faktoren, welche in ihnen mehr als einmal vorkommen, wegzu-

zuschaffen, welches eben durch Befolgung der gegebenen Regel geschiehet. So fanden wir in den Nennern 15.20.21, daß 5 sowohl in 15 als 20 genau enthalten sey; (§.44.) also nahmen wir die 5 von ihnen als Divisor, um ihn als Faktor bei den entstehenden Zahlen 3.4.21 zu gebrauchen; da aber auch hier noch 3 und 21 die 3 genau enthielten, so nahmen wir auch die 3 als Divisor zu gleicher Absicht, und es konnten nun keine andere einfache verschiedene Faktoren als die Divisores 3 und 5 nebst den Zahlen 4 und 7 zum Produkt genommen werden.

Hätte man bei diesen Brüchen $\frac{7}{15}, \frac{13}{20}, \frac{16}{21}$ auf vorige Art verfahren, so würden offenbar die Brüche $\frac{7.20.21}{15.20.21}, \frac{15.13.21}{15.20.21}, \frac{15.20.16}{15.20.21}$ oder $\frac{2940}{6300}, \frac{4095}{6300}, \frac{4800}{6300}$ entstanden seyn, die zwar auch gleiche Nenner haben, aber mühsamer bestimmt, und doch noch durch die Theilung mit 15 auf noch eine kleinere Benennung gebracht werden können.

Wären ferner die Brüche $\frac{7}{3}, \frac{4}{6}, \frac{3}{8}, \frac{13}{16}, \frac{9}{24}$ gegeben, so setzen wir:

die Nenner	und die Brüche
8) 3.6.8.16.24	$\frac{7}{3}, \frac{4}{6}, \frac{3}{8}, \frac{13}{16}, \frac{9}{24}$
3) 3.6.1. 2. 3	(8.3.2 = 48
2) 1.2.1. 2. 1	$\frac{112}{48}, \frac{32}{48}, \frac{18}{48}, \frac{39}{48}, \frac{18}{48}$
1.1.1. 1. 1	

In diesem Beispiele sehen wir, daß sich die Nenner zuweilen auch so theilen lassen, daß man nur ein Produkt der Divisoren zum gemeinschaftlichen Nenner erhält.

Und trift es sich, daß ein Nenner die andern genau enthält, so kann man ihn sogleich zum gemeinschaftlichen Nenner nehmen.

So könnten wir bei den Brüchen $\frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{16}, \frac{9}{32}$ sogleich setzen:

$$\frac{\frac{7}{8},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{16},\ \frac{9}{32}}{\frac{28}{32},\ \frac{24}{32},\ \frac{10}{32},\ \frac{9}{32}}(32 \quad \text{u. s. w.}$$

§. 76.

Weil wir endlich bei Größen auch dahin trachten müssen, sie so einfach als möglich darzustellen, so berühren wir noch die Aufgabe: **Einen Bruch ohne Nachtheil seines Werthes auf die kleinste Benennung zu bringen.**

Dieselbe aufzulösen, muß man zu beurtheilen wissen: was für Zahlen die Glieder des gegebenen Bruchs genau enthalten.

Erinnern wir uns demnach an die Eigenschaften der Zahlen, welche 2, 3, 5 und 11 genau in sich fassen (§. 44.) so können wir durch diese die Glieder der Brüche, wenn sie nicht sehr groß sind, nach und nach theilen.

Gesetzt, daß $\frac{32}{48}$ auf die kleinste Benennung zu bringen wäre, so bemerken wir, daß die Glieder mit geraden Zahlen endigen, und setzen

$$\frac{32}{48} \overset{2}{=} \frac{16}{24} \overset{2}{=} \frac{8}{12} \overset{2}{=} \frac{4}{6} \overset{2}{=} \frac{2}{3}$$

Ferner, wäre $\frac{60}{96}$ auf eine kleinere Benennung zu bringen, so setzen wir: $\frac{60}{96} \overset{3}{=} \frac{20}{32} \overset{4}{=} \frac{5}{8}$, weil vom Nenner

ner des gegebenen Bruchs 9 und 6 zusammengenommen, eine Zahl giebt, die, wie 6 vom Zähler durch 3 getheilt werden kann.

Und wäre $\frac{225}{240}$ gegeben, so müssen wir setzen:

$$\frac{225}{240} \overset{5}{=} \frac{45}{48} \overset{3}{=} \frac{15}{16},$$ wo wir zuerst mit 5 theilen, weil die Glieder des gegebenen Bruchs mit 5 und 0 endigen.

Würde endlich $\frac{231}{4752}$ gegeben, so ist wiederum

$$\frac{231}{4752} \overset{11}{=} \frac{21}{432} \overset{3}{=} \frac{7}{144},$$ wo wir anfangs mit 11 theilen, weil die Summen der geraden und ungeraden Stellen von den Gliedern des gegebenen Bruchs einander gleich sind, u. s. w.

§. 77.

Wären aber die Glieder der gegebenen Brüche sehr groß, so würde voriges Verfahren sehr beschwerlich seyn; daher müssen wir noch folgende Aufgabe auflösen; nemlich: **den größten gemeinschaftlichen Divisor zweier Zahlen, oder geradezu, eines Bruches zu finden.**

Denselben zu erhalten, theile man mit der kleinern Zahl die größere, und wäre die kleinere in der größeren genau enthalten, so ist dieselbe beider gemeinschaftlicher Divisor; bleibt aber ein Rest, so theile man mit ihm von neuem die kleinere Zahl, geht dann die Division auf, so ist dieser Divisor beiden Zahlen gemein; bleibt hingegen wieder ein Rest, so theile man mit ihm den zweiten Divisor, und fahre so fort, bis kein Rest übrig bleibt, wo wir endlich den letzten Divisor für den annehmen, der beiden Zahlen gemein-

schaftlich ist. Erkenneten wir aber in ihm die Einheit, so schließen wir mit Recht, daß der gegebene Bruch auf keine kleinere Benennung gebracht werden könne.

Sollten wir demnach von $\frac{936}{1224}$ den gemeinschaftlichen Divisor finden, so setzen wir:

```
936|1224|1
     936
    ----
     288|936|3
         864
        ----
          72|288|4
             288
            ----
```

und sagten: 72 wäre der größte gemeinschaftliche Divisor; wirklich ist auch $\frac{936}{1224} \overset{72}{=} \frac{13}{17}$, welcher letztere Bruch auf keine kleinere Benennung zu bringen ist.

Um uns auch zu überzeugen, warum 72 der größte gemeinschaftliche Divisor ist, schließen wir folgendermassen: da 72 in 288 genau enthalten ist, so muß es auch 72 in jedem Produkt von 288 und jeder beliebigen Zahl seyn, in welcher sie um sovielmal mehr enthalten ist, als die andere Zahl Einheiten hat; nun ist die Zahl $864 = 3 . 288$, also folgt, daß 72 genau in 864 enthalten ist; setzten wir aber zu 864 die Zahl 72, wodurch wir $864 + 72 = 936$ bekommen, so folgt, daß 72 in dieser Zahl 936, als in der gegebenen kleinern Zahl, noch einmal mehr, als in 864 enthalten ist, weil sie selbst zu dieser gesetzt werden muß, um 936 zu bekommen. Endlich da 72 nun nicht allein in 936, sondern auch in 288 genau enthalten ist, so muß sie es auch in beider Summen, oder in $936 + 288 = 1224$, d. h. in der gegebenen größern Zahl seyn.

Wäre

Wäre ferner der Bruch $\frac{5148}{4056}$ gegeben, so setzen wir, indem wir uns der Abkürzung (§. 61. b.) bedienen:

```
4056|5148|1
    1092|4056|3
          780|1092|1
               312|780|2
                    156|312|2
```

und finden 156 zum größten gemeinschaftlichen Divisor; mithin ist $\frac{5148}{4056} \overset{156}{=} \frac{33}{26}$.

§. 78.

Da wir in beiden vorigen §. §. erwiesen haben, daß die herausgebrachten Brüche von der kleinsten Benennung waren, und also auf keine kleinere gebracht werden könnten; so wollen wir noch zusehen, ob sie nicht eine Eigenschaft haben, wodurch sie sich von andern unterscheiden lassen. Betrachten wir demnach die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{8}$, welche aus $\frac{32}{48}$ und $\frac{60}{96}$ entstanden; (§. 75.) so sehen wir, daß ihre **Glieder** 2 **und** 3, **wie** 5 **und** 8 **einfache Zahlen verschiedener Art sind.**

Und nehmen wir $\frac{15}{16}$ (aus §. 76.) und $\frac{33}{26}$ (aus §. 77.), die von $\frac{225}{2401}$ und $\frac{5148}{4056}$ entstanden, und durch $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}$, und $\frac{3 \cdot 11}{2 \cdot 13}$ vorgestellt werden können; so sehen wir, daß ihre Glieder Produkte der Zahlen $3 \cdot 5$ und $4 \cdot 4$, wie $3 \cdot 11$ und $2 \cdot 13$ sind, die ebenfalls einfache Zahlen verschiedener Art darstellen. Da nun diese Eigenschaft bei allen Brüchen angetroffen wird, die auf

keine kleinere Benennung gebracht werden können; so schließen wir: Brüche, deren Glieder entweder Produkte, oder selbst, einfache Zahlen verschiedener Art enthalten, können nicht auf kleinere Benennung gebracht, oder einfacher vorgestellt werden.

Da uns nunmehro die Eigenschaften der Brüche genugsam bekannt sind, so wollen wir auch ihre Behandlung in den vier Rechnungsarten zeigen, für welche die oben (§. 23, 29, 37, 51) gegebene Erklärungen gelten, und keiner Wiederholung bedürfen.

Zweiter Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten in Brüchen.

Von der Addizion der Brüche.

§. 79.

Da wir ganze Zahlen ohne Nachtheil ihres Werths als Brüche vorstellen können, (§. 65.) so ist es ganz natürlich, daß wir bei sämtlichen Rechnungsarten entweder blos mit Brüchen, oder mit ganzen Zahlen und Brüchen zu thun haben, weshalb wir diese beiden Fälle in einer jeden besonders betrachten.

Wäre demnach von den Brüchen $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{8}$ die Summe zu bestimmen, so addire man deren Zähler, und gebe der entstehenden Summe, den gemeinschaftlichen Nenner.

Also, weil $1 + 5 + 7 = 13$ (nach §. 24) so muß $\frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$ seyn.

Daß hier die Zahl $1\frac{5}{8}$ wirklich die verlangte Zahl sey, überzeugen wir uns, wenn wir schließen: Da die gege=

gegebenen Brüche gleiche Nenner haben, so enthalten sie gleiche Theile, (§. 63) und da die Zähler die Menge der in ihnen enthaltenen Theile anzeigen, so muß es auch deren Summe thun; mithin folgt, weil diese keine Theile anzeigen darf, die von den gegebenen verschieden wären, daß man derselben den gemeinschaftlichen Nenner geben müsse.

Sollte aber $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ gegeben seyn, so müssen wir diese Brüche unter gleiche Benennung bringen, und dann mit den entstehenden wie vorher verfahren (zufolge §. 74.)

Wir setzen also

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{2.4.6}{5.4.6} + \frac{5.3.6}{5.4.6} + \frac{5.4.5}{5.4.6} =$$

$$\frac{48 + 90 + 100}{120} = \frac{238}{120} = 1\frac{118}{120} = 1\frac{59}{60}.$$

Wäre $\frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{7}{16}$ gegeben, so setzen wir (nach §. 75.)

$$\frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{7}{16}}{}(16$$

$$\frac{10 + 12 + 7}{16} = \frac{29}{16} = 1\frac{13}{16}.$$

Ferner ist $\frac{19}{4} + \frac{79}{12} + \frac{26}{3} = \frac{57 + 79 + 104}{12} =$ $\frac{240}{12} = 20$ u. s. w.

Oder wäre $\frac{56}{100} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$ gegeben, so ist $\frac{56}{100} =$ 0,56; $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{5}{8} = 0{,}625$; (nach §. 73.) mithin auch $\frac{56}{100} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} = 0{,}56 + 0{,}75 + 0{,}625 =$ 1,935. (nach §. 26.)

Sollte endlich $\frac{45}{1000} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5}$ gegeben seyn, und wir dürften nach den Umständen dieser Größen nicht $\frac{1}{1000}$ achten, so setzten wir:

$\frac{45}{1000} = 0,045$; $\frac{2}{3} = 0,667$; und $\frac{3}{5} = 0,6$; mithin wären $0,045 + 0,667 + 0,6 = 1,312$.

Wollte man aber diese Summe aufs genaueste bestimmen, so müßte man wir nach dem zweiten Exempel verfahren.

§. 80.

Sind ganze Zahlen mit Brüchen gegeben, so braucht man nur letztere in eine Summe zu bringen, und solche den erstern zuaddiren.

Wäre demnach $50 + \frac{3}{4} + 26 + \frac{5}{7}$ gegeben, so ist (nach §. 74,) $\frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{21 + 20}{28} = \frac{41}{28} = 1\frac{13}{28}$, und folglich: $50 + \frac{3}{4} + 26 + \frac{5}{7} = 50 + 26 + 1\frac{13}{28}$ $= 77\frac{13}{28}$.

Auch können wir das dritte Exempel des vorigen §. unter diesen Fall nehmen: denn $\frac{19}{4} + \frac{79}{12} + \frac{26}{3} = 4\frac{3}{4}$ $+ 6\frac{7}{12} + 8\frac{2}{3}$, machen wir also erst von den mit den ganzen Zahlen verbundenen Brüchen die Summe besonders, und vereinigen diese wiederum mit ihnen, so müssen wir ebenfalls die dort bestimmte Zahl erhalten. Da nun

$\frac{3}{4} +$

$\frac{3}{4} + \frac{7}{12} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{7}{12} + \frac{8}{12} = \frac{24}{12} = 2$, so ist auch $4 + 6 + 8 + 2 = 20$.

Und würde gefragt: Wieviel Ctr. Pulver hat man empfangen, als man uns für die Artillerie $60\frac{3}{4}$ Ctr., für die Infanterie, $113\frac{1}{2}$ Ctr. und für die Kavallerie, $19\frac{3}{8}$ Ctr. zur Manövrezeit überließ? so setzen wir (n. §. 74) $\frac{3}{4}$ Ctr. + $\frac{1}{2}$ Ctr. + $\frac{3}{8}$ Ctr. = $\frac{6}{8}$ Ctr. + $\frac{4}{8}$ Ctr. + $\frac{3}{8}$ Ctr. = $\frac{13}{8}$ Ctr. = $1\frac{5}{8}$ Ctr.; mithin folgt, daß 60 Ctr. + 113 Ctr. + 19 Ctr. + $1\frac{5}{8}$ Ctr., d. h. $193\frac{5}{8}$ Ctr. sind empfangen worden.

Es ist hier fast überflüßig zu bemerken, daß es völlig gleichgültig sey, wie man die gegebenen Größen ordnen will, weshalb man sie auch, wie bei den ganzen und zehntheiligen Zahlen untereinander setzen kann. Hat man aber die Absicht, sie leicht übersehen zu wollen, so wird die hier gezeigte Art immer den Vorzug verdienen.

Von der Subtrakzion in Brüchen.

§. 81.

Sollen Brüche von einander abgezogen werden, welche gleiche Nenner haben, so darf man nur den Rest der Zähler bestimmen, und demselben den gemeinschaftlichen Nenner geben.

Wären demnach die Brüche $\frac{8}{9}$ und $\frac{5}{9}$ gegeben, so sagen wir: $8 - 5 = 3$, (nach §. 30), mithin muß $\frac{8}{9} - \frac{5}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ seyn.

Daß hier $\frac{1}{3}$ die verlangte Zahl sey, ist nach dem, wie der Beweis für die Summe gegebener Brüche (§. 79) geführet worden ist, von selbst einleuchtend.

Wäre hingegen $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$ gegeben, so wissen wir, daß $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{20 - 18}{24}$ ist, (nach §. 74.) mithin folgt, daß $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{20 - 18}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ ist.

Eben so würde $\frac{14}{16} - \frac{3}{8} = \frac{14}{16} - \frac{6}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ seyn.

Auch ist $\frac{7}{4} - \frac{18}{13} = \frac{7}{4} - \frac{18}{13} = \frac{7 \cdot 13}{4 \cdot 13} - \frac{18 \cdot 4}{13 \cdot 4} = \frac{91 - 72}{52} = \frac{19}{52}$.

Und $\frac{14}{3} - \frac{6}{5} = \frac{70 - 18}{15} = \frac{52}{15} = 3\frac{7}{15}$ u. s. w.

Wäre endlich $\frac{3}{4} - \frac{37}{100}$ gegeben, so ist $\frac{3}{4} = 0{,}75$; und $\frac{37}{100} = 0{,}37$; mithin $\frac{3}{4} - \frac{37}{100} = 0{,}75 - 0{,}37 = 0{,}38$.

§. 82.

Sollten von ganzen Zahlen Brüche abgezogen werden, so darf man nur erstere um einen Einer vermindern, der eben so viel Theile enthält, als des Bruchs Nenner anzeigt, (§. 65.) nachher von demselben die Theile des Bruchs wegnehmen, und dem entstehenden Reste die um eins verminderte Zahl anhängen.

Würde demnach verlangt, daß man den Ausdruck $3 - \frac{3}{4}$ auflösen sollte, so sagen wir: $\frac{3}{4}$ von 1 oder $\frac{4}{4}$. läßt $\frac{1}{4}$, zu welchen die um 1 verminderte 3, d. h. 2 genommen, $2\frac{1}{4}$ zum Rest der gegebenen Zahl bestimmt.

Eben so ist $64 - \frac{7}{9} = 63\frac{2}{9}$; $50 - \frac{15}{16} = 49\frac{1}{16}$ u. s. w.

Auch könnten wir hiebei das vierte Beispiel des vorigen §. nehmen, welches den Werth von $\frac{14}{3} - \frac{6}{5}$ bestimmte. Denn da $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ und $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$, so können wir die Brüche unter gleiche Benennung bringen, und dann dieselben, wie die ganzen Zahlen, von einander abziehen, und die gefundenen Reste zusammen setzen.

Weil nun $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10 - 3}{15} = \frac{7}{15}$ ist (n. vorigem §.) so ist $\frac{14}{3} - \frac{6}{5} = 4\frac{2}{3} - 1\frac{1}{5} = 3\frac{7}{15}$ wie vorhin.

Sollte endlich die Aufgabe gegeben werden: Es habe die Festung A. $3465\frac{3}{4}$ Ctr. Pulver empfangen, und dafür

für 398 Thl. $7\frac{2}{3}$ Gr. Fracht bezahlen müssen. Eine andere B. habe ihr aber $1942\frac{5}{8}$ Ctr. mit Vergütigung von 227 Thl. $8\frac{3}{4}$ Gr. Frachtlohn abgenommen; man frägt: wieviel Pulver die erstere behalten, und wieviel Fracht-Kosten sie davon gehabt? so setzen wir:

Die Festung A. empfieng	$3465\frac{3}{4}$ Ctr.	für	398 Thl.	$7\frac{2}{3}$	Gr. Fr. K.
" " B. nahm ab	$1942\frac{5}{8}$ "	"	227 "	$8\frac{3}{4}$	" "
mithin bleiben ersterer	$1523\frac{1}{8}$ Ctr.	für	170 Thl.	$22\frac{11}{12}$	Gr. Fr. K.

denn wir sprechen: Da $\frac{3}{4}$ Gr. $=$ $\frac{9}{12}$ Gr. und $\frac{2}{3}$ Gr $=$ $\frac{8}{12}$ Gr. (nach §. 72.) aber jene von diesen nicht abgezogen werden können, so müssen wir 1 Gr. $= \frac{12}{12}$ Gr. von den 7 Gr. entlehnen, mithin sind $\frac{12}{12}$ Gr. $+$ $\frac{8}{12}$ Gr. $=$ $\frac{20}{12}$ Gr. und $\frac{20}{12}$ Gr. $-$ $\frac{9}{12}$ Gr. $=$ $\frac{11}{12}$ Gr. u. s. w.

Ferner, da $\frac{3}{4}$ Ctr. $=$ $\frac{6}{8}$ Ctr. so ist $\frac{6}{8}$ Ctr. $-$ $\frac{5}{8}$ Ctr. $-$ $\frac{1}{8}$ Ctr. u. s. w.

Wir halten es für überflüßig, mehrere Beispiele der Art zu geben, weil man sich nach den bisherigen in jedem Fall zu helfen wissen wird, und gehen deshalb weiter.

Von

Von der Multiplikazion in Brüchen.

§. 83.

Das Produkt zweier oder mehrerer Brüche zu bestimmen, multiplizirt man Zähler mit Zählern, und Nenner mit Nennern.

Wäre demnach das Produkt von $\frac{4}{5}$ und $\frac{2}{3}$ zu bestimmen, so setzen wir: $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$.

Um uns zu überzeugen, daß $\frac{8}{15}$ die verlangte Zahl sey, sprechen wir: da ein Bruch genau um sovielmal größer wird, als die Zahl anzeigt, mit der man seinen Zähler mutiplizirt (§. 71); so folgt, daß der Zähler 4 vom Bruch $\frac{4}{5}$ blos mit 2 multiplizirt, den Bruch $\frac{8}{5}$ giebt, der 2 mal so groß als $\frac{4}{5}$ ist. Da aber nicht mit 2, sondern mit $\frac{2}{3}$ multiplizirt werden soll, und bekanntlich derselbe nur der dritte Theil von 2 ist (nach §. 67.), so folgt, daß die erlangte Größe $\frac{8}{5}$, 3mal größer als das verlangte Produkt sey, und deshalb 3mal kleiner gemacht, d. h. dessen Nenner mit 3 multiplizirt werden müsse (nach §. 68.), wie wirklich geschehen, und zu erweisen war.

Wäre der Ausdruck $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7}$ aufzulösen, so setzen wir: $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 7}$; da nun hier die Zahl 4 vom Zähler im Nenner 8 genau enthalten ist, so folgt, daß $\frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 7} = \frac{3}{14}$ ist.

Ist also ein Zähler des einen Bruchs, in dem Nenner des andern genau enthalten, so kommen wir jederzeit näher zum Produkte, wenn wir sie vor der Auflösung durch einander theilen.

Demnach ist $\frac{\cancel{14}}{30} \cdot \frac{45}{\cancel{42}} = \frac{45}{30 \cdot 3} = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}.$

Ferner $\frac{9}{\cancel{24}} \cdot \frac{\cancel{12}}{15} = \frac{\cancel{9}}{2 \cdot \cancel{15}} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$

Weiter ist $\frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} = \frac{7 \cdot 5}{4} = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}.$

Wäre endlich $\frac{4}{5} \cdot \frac{21}{12} \cdot \frac{20}{15} \cdot \frac{9}{8}$ aufzulösen; so setzen wir:

$$\frac{\cancel{4} \cdot 21 \cdot \overset{4}{\cancel{20}} \cdot 9}{\cancel{5} \cdot 12 \cdot 15 \cdot \underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{21 \cdot \cancel{4} \cdot \overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{3}{\cancel{12}} \cdot \underset{5}{\cancel{15}} \cdot 2} = \frac{21}{10} = 2{,}1.$$

§. 84.

Sind ganze Zahlen und Brüche gegeben, so können wir mit erstern die Zähler multipliziren, und das Produkt mit dem Nenner theilen, und dann den Quozienten mit dem Zähler multipliziren.

Wäre $765 \cdot \frac{3}{7}$ aufzulösen; so setzten wir:

$$\frac{765 \cdot 3}{7} = \frac{2295}{7} = 327\frac{6}{7}$$

Wäre hingegen $1248 \cdot \frac{5}{4}$ gegeben; so setzten wir:

$$\frac{\cancel{1248} \cdot 5}{4} = 312 \cdot 5 = 1560.$$

Ferner

Ferner $4736 \cdot \frac{7}{8} = \frac{4736 \cdot 7}{8} = 592 \cdot 7 = 4144$.

Oder sollte $334 \cdot \frac{25}{100}$ aufgelöset werden, so können wir auch setzen, weil $\frac{25}{100} = 0{,}25 = \frac{1}{4}$ (nach §. 73.) so ist $334 \cdot \frac{25}{100} = 334 \cdot \frac{1}{4} = \frac{334}{4} = 83\frac{1}{2}$.

Eben so ist $215 \cdot \frac{375}{1000} = 215 \cdot \frac{3}{8} = \frac{215}{8} \cdot 3 = 26{,}875 \cdot 3 = 80{,}525$, weil $\frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$ ist.

Ferner $625 \cdot \frac{75}{1000} = 625 \cdot \frac{3}{4} = 156{,}25 \cdot 3 = 468{,}75$ u. s. w.

Hier ist nun zu bemerken, daß man beim Multipliziren ganzer Zahlen, noch eine Abkürzung der Rechnung erhält, wenn eine von ihnen, oder beide, mit den bestimmten zehntheiligen Zahlen (§. 73.) Aehnlichkeit haben. Gesetzt, daß 456 mit 875 zu multipliziren wäre, so wissen wir, daß $456 \cdot 875 = 456000 \cdot 0{,}875$ ist (n. §. 46.) Da nun $0{,}875 = \frac{7}{8}$, so folgt, daß $456 \cdot 875 = 456000 \cdot \frac{7}{8} = \frac{456000}{8} \cdot 7 = 57000 \cdot 7 = 399000$ ist.

Eben so würde $2250 \cdot 75 = 225000 \cdot 0{,}75 = 225000 \cdot \frac{3}{4} = \frac{225000}{4} \cdot 3 = 56250 \cdot 3 = 168750$.

Und $375 \cdot 0{,}000625 = 0{,}375 \cdot 0{,}625\ \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15{,}000}{8 \cdot 8} = \frac{1{,}875000}{8} = 0{,}234275$ seyn, u. s. w.

 Endlich

Endlich können wir auch unter diesen Fall diejenigen Beispiele rechnen, wo ganze Zahlen mit angehängten Brüchen gegeben werden, die man sogleich (n. §. 66.) in unächte Brüche verwandeln, und dann Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multipliziren muß. Ein dergleichen Beispiel ist schon das vierte $\frac{14}{3} \cdot \frac{15}{8}$ vom vorigen §.: denn da $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$, und $\frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ (n. §. 66.), so ist offenbar $4\frac{2}{3} \cdot 1\frac{7}{8}$

$$= \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}.$$

Würde ferner $5\frac{3}{7} \cdot 27\frac{2}{5}$ gegeben, so schließen wir; da $5\frac{3}{7} = \frac{38}{7}$; und $27\frac{2}{5} = \frac{137}{5}$; (n. §. 66.) so ist

$5\frac{3}{7} \cdot 27\frac{2}{5} = \frac{38}{7} \cdot \frac{137}{5} = \frac{5206}{35} = 148\frac{26}{35}$, u. s. w.

Sollte aber eine dergleichen Zahl mit angehängtem Bruche durch eine ganze Zahl multipliziret werden, so ist nicht nöthig, daß man erstere in einen unächten Bruch verwandele; sondern man multipliziret sogleich den Zähler ihres Bruches, theilet das Produkt mit seinem Nenner, und setzet den bleibenden Rest mit ihm hin; sodann aber multipliziret man die ganze Zahl, und addiret zum Produkte den vorher erhaltenen Quozienten.

Wäre demnach $4\frac{3}{4}$ mit 7 zu multipliziren, so setzen wir:

$$\begin{array}{r} 4\frac{3}{4} \\ 7 \\ \hline 33\frac{1}{4} \end{array}$$

und

und sprechen: $\frac{3}{4} \cdot 7 = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$, setzen $\frac{1}{4}$ hin; und sodann: $4 \cdot 7 = 28$ wozu der erhaltene Quozient 5 genommen 33 giebt.

Eben so ist $16\frac{6}{8} \cdot 4 = 67$ u. s. w.

Oder sagte man: In Kampagne werden auf jeden Mann täglich $2\frac{1}{2}$ ℔ Brod und $\frac{3}{4}$ ℔ Fleisch gereicht, man frägt: wieviel Brod und Fleisch eine Kompagnie von 200 Mann jeden Tag empfangen müsse? so setzen wir (weil 200 Mann offenbar 200 mal soviel als 1 Mann erhalten müssen)

$2\frac{1}{2}$ ℔ Brod und $\frac{3}{4}$ ℔ Fleisch
mit 200 multiplizirt

giebt 500 ℔ Brod und 150 ℔ Fleisch, welches die Kompagnie empfängt.

Von der Division in Brüchen.

§. 85.

Brüche zu dividiren, kehre man den Divisor um, und multiplizire nachher mit dem neuen Bruch den Dividenden, so ist das entstehende Produkt der verlangte Quozient.

Sollte also $\frac{2}{3}$ durch $\frac{4}{5}$ getheilt werden, so würden wir setzen: weil $\frac{4}{5}$ verkehrt genommen, $\frac{5}{4}$ giebt, $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{\not{2}}{3} \cdot \frac{5}{\not{4}_{2}} = \frac{5}{6}$.

 Um

Um uns zu überzeugen, daß $\frac{5}{6}$ der wahre Quozient sey, sprechen wir: da $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{10}{15} : \frac{12}{15}$ (§. 74.), so müssen offenbar die letztern Brüche, wie die erstern, einen gleichen Quozienten geben; da aber dieser seinem Werthe nach nicht verändert wird, wenn man den Divisor und Dividenden um gleichvielmal größer macht, (§. 53.) so folgt, daß $\frac{10}{15} : \frac{12}{15} = 10 : 12$ (n. §. 69.), mithin ist $10 : 12 = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Eben also ist $\frac{3}{8} : \frac{4}{12} = \frac{3}{8} . \frac{12}{4} = \frac{3 . \overset{3}{\cancel{12}}}{8 . \cancel{4}} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$.

Ferner $\frac{16}{3} : \frac{16}{27} = \frac{\cancel{16}}{\cancel{3}} . \frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\cancel{16}} = 9$ u. s. w.

Oder wäre $\frac{48}{50} : \frac{75}{100}$ gegeben, so ist $\frac{75}{100} = 0{,}75 = \frac{3}{4}$; mithin $\frac{48}{50} : \frac{75}{100} = \frac{48}{50} : \frac{3}{4} = \frac{\overset{16}{\cancel{48}}}{\underset{25}{\cancel{50}}} . \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{3}} = \frac{32}{25} = 1\frac{7}{25}$.

§. 86.

Sind ganze Zahlen mit Brüchen gegeben, so stellet man erstere als Brüche vor, deren Nenner 1 ist, und verfährt wie vorhin.

Demnach ist $3 : \frac{3}{4} = \frac{\cancel{3}}{1} . \frac{4}{\cancel{3}} = 4$.

Ferner

Ferner $\frac{5}{6} : 15 = \frac{5}{6} : \frac{15}{1} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{18}$.

Und $\frac{17}{3} : 51 = \frac{17}{3} \cdot \frac{1}{51} = \frac{1}{9}$ u. s. w.

Oder wäre $18 : \frac{625}{1000}$ gegeben, so ist $\frac{625}{1000} = 0,625$ $= \frac{5}{8}$; mithin $18 : \frac{625}{1000} = 18 : \frac{5}{8} = \frac{18}{1} \cdot \frac{8}{5} = \frac{144}{5}$ $= 28\frac{4}{5}$.

Und so können wir auch hier beim Dividiren ganzer Zahlen, eine Abkürzung erhalten, sobald eine derselben mit den mehrgedachten zehntheiligen Zahlen (§. 73.) Aehnlichkeit hat. Gesetzt, daß 752:375 gegeben wäre, so ist 752:375 = 0,752:0,375 (n. §. 52.); da nun $0,375 = \frac{3}{8}$, so folgt, daß $0,752 : 0,375 = 0,752 : \frac{3}{8}$ $= 0,752 \cdot \frac{8}{3} = \frac{6,016}{3} = 2,005\frac{1}{3}$ ist u. s. w.

Werden endlich noch Zahlen mit angehängten Brüchen gegeben, so können wir sie, wie bei deren Multiplikazion (§. 84.) erst in unächte Brüche (n. §. 66.) verwandeln, und dann gewöhnlicherweise verfahren.

Wäre demnach $15\frac{3}{4} : 8\frac{7}{9}$ gegeben, so schließen wir; da $15\frac{3}{4} = \frac{63}{4}$, und $8\frac{7}{9} = \frac{79}{9}$; so folgt, daß $15\frac{3}{4} : 8\frac{7}{9}$ $= \frac{63}{4} : \frac{79}{9} = \frac{63}{4} \cdot \frac{9}{79} = \frac{567}{316} = 1\frac{251}{316}$ ist, u. s. w.

Oder es sey bekannt, daß bei einer Armee die tägliche Razion der Artilleriepferde 24 Winspel 7 Scheffel 1 Viertel $1\frac{1}{3}$ Metze Gerste betrage, wenn auf jedes $2\frac{1}{3}$ Metze gut gethan wird; man frägt: wieviel gedachter Pferde befinden sich bei der Armee?

Weil offenbar eben so viele Pferde da seyn müssen, als $2\frac{1}{3}$ Metze in 24 W. 7 S. 1 V. $1\frac{1}{3}$ M. enthalten sind, und 1 W. = 24 S., 1 S. = 4 V. rc. ist (n. §. 19.) so setzen wir erst, die Menge Metzen zu erhalten, (n. §. 49.)

24) 24 Winspel 7 Scheffel 1 Viertel $1\frac{1}{3}$ Metze
96 . . .
487 . . . .
583 S. = 24 W. 7 S. .
4) 2333 V. = 24 W. 7 S. 1 V.
4) $9333\frac{1}{3}$ M. = 24 W. 7 S. 1 V. $1\frac{1}{3}$ M.

Nun ist $9333\frac{1}{3} : 2\frac{1}{3} = \frac{28000}{3} : \frac{7}{3} = 28000 : 7 = 4000$; mithin sind bei der Armee 4000 Artillerie-Pferde.

§. 87.

Endlich müssen wir noch anzeigen, daß ein jeder Bruch in einen gebrochenen Bruch verwandelt wird, sobald man dessen Glieder mit einer Zahl theilet, die in einem, oder beiden nicht genau enthalten ist.

Wäre z. E. der Bruch $\frac{3}{4}$ gegeben, so ändert sich sein Werth nicht, wenn wir seine Glieder mit 3 theilen

len (§. 72.); da nun $\frac{3}{3} = 1$, und $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, so folgt, daß $\frac{3}{4} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$ ist.

Eben so ist $\frac{5}{6} = \frac{\frac{5}{2}}{3}$; und $\frac{4}{7} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{5}}$, welche gebrochne Brüche nun umgekehrt auf einfachere Brüche gebracht werden, wenn man mit der unter dem grossen Strich befindlichen Größe, die über ihm stehende, wie bisher, theilet; also ist $\frac{1}{\frac{4}{3}} = 1 : \frac{4}{3} = 1 . \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, u. s. w. Es stellen demnach diese gebrochenen Brüche ebenfalls vor, daß entweder eine ganze Zahl durch einen Bruch, und so umgekehrt; oder ein Bruch durch einen andern getheilt werden soll.

Da wir nunmehro alle in Brüchen vorkommenden Fälle bestimmen können, so wenden wir uns zu denen Zahlen, die am meisten in der Geometrie ihre Anwendung finden.

Vierte Abtheilung.

Von den Quadrat- und Kubik-Zahlen, nebst ihren Wurzeln.

Von den Quadrat-Zahlen.

§. 88.

Wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplizirt, so wird deren entstehendes Produkt ihre Quadrat-Zahl genannt.

Dieser Erklärung gemäß, verstehen wir unter einer Quadratzahl stets ein Produkt zweier gleichen Zahlen, deren Benennung blos aus der Geometrie herzuleiten ist, wo der Inhalt eines Quadrats gefunden wird, wenn man das Maß einer Seite mit sich selbst multiplizirt.

So wie nun offenbar von einer Zahl nur eine einige Quadratzahl bestimmt werden kann; so ist auch umgekehrt von jeder Quadratzahl nur eine Zahl anzugeben, aus welcher jene entstehen kann, die ihre Quadrat-Wurzel genannt wird.

Wollten wir demnach eine Quadratzahl von 2 haben, so setzen wir, $2.2 = 4$; in welchem Ausdruck 4 als die Quadratzahl von 2; und hingegen 2 als die Quadratwurzel von 4 anerkannt wird.

§. 89.

Da ferner eine der beiden vorigen Bestimmungen bei jeder Zahl statt finden kann; nemlich, daß man entweder ihre Quadratzahl, oder ihre Quadratwurzel ver-

verlangt; so wollen wir jetzt die Eigenschaften der erstern zu entdecken suchen.

Um aber anzuzeigen, daß von einer gegebenen Zahl die Quadratzahl verlangt werde, so können wir ihr etwas höher zur Rechten, die Ziffer 2 setzen, welche ihr Exponent heißen mag, weil die unter ihr stehende Zahl 2mal als Faktor zu setzen ist.

Also würde 3^2, $\frac{4^2}{5^2}$ oder $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ u. s. w. die Quadratzahlen von 3, und $\frac{4}{5}$ anzeigen, weil $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, und $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \frac{16}{25}$ ist.

§. 90.

Um von dem leichtern zu dem schwerern überzutreten, betrachten wir die gegebenen Zahlen unter folgenden zwei Fällen.

a. Mögen sie eine bedeutende Ziffer,
b. derselben mehrere haben.

Wir nehmen also nach dem ersten Fall die Quadratzahlen von 1 bis 9, setzen sie in natürlicher Ordnung in folgende Tabelle, damit wir sie leicht übersehen und uns eigen machen können, weil auf ihrer Kenntniß die Bestimmung aller übrigen Quadratzahlen beruhet.

Gegebene Zahlen	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Quadratzahlen	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

Sollten wir also eine Quadratzahl von 5 bestimmen, so würden wir blos die unter derselben stehende Zahl 25 nehmen.

Und eben so verfahren wir bei gegebenen Zahlen, die nicht 9 übersteigen.

 Demnach

Demnach ist $3^2 = 9$; $9^2 = 81$ rc. rc. $\frac{4^2}{7^2} = \frac{16}{49}$; $\frac{6^2}{8^2} = \frac{36}{64}$ u. s. w.

Nehmen wir aber diese Zahlen um 10,100,1000 mal größer oder kleiner an, so erhalten wir von ihnen nach und nach folgende Quadratzahlen; als: für die ganzen Zahlen:

$$10^2 = 10 \;.\; 10 = 100$$
$$90^2 = 90 \;.\; 90 = 8100$$
$$100^2 = 100 \;.\; 100 = 10000$$
$$900^2 = 900 \;.\; 900 = 810000$$
$$9000^2 = 1000 \;.\; 1000 = 1000000$$
$$9000^2 = 9000 \;.\; 9000 = 81000000$$

Und für die zehntheiligen Zahlen:

$$0{,}1^2 = 0{,}1 \;.\; 0{,}1 = 0{,}01$$
$$0{,}9^2 = 0{,}9 \;.\; 0{,}9 = 0{,}81$$
$$0{,}01^2 = 0{,}01 \;.\; 0{,}01 = 0{,}0001$$
$$0{,}09^2 = 0{,}09 \;.\; 0{,}09 = 0{,}0081$$
$$0{,}001^2 = 0{,}001 \;.\; 0{,}001 = 0{,}000001$$
$$0{,}009^2 = 0{,}009 \;.\; 0{,}009 = 0{,}000081 \text{ u. s. w.}$$

Geben wir hier Acht, in welchen Stellen die bedeutenden Ziffern der Quadratzahlen endigen, so finden wir, daß die von den Zehnern und Zehntheilen in der dritten Stelle linker und rechter Hand; die der Huntderte und Hunderttheile eben so in der 5ten Stelle; der Tausende und Tausendtheile in der 7ten Stelle; und kurz, daß sie in den ungeraden Stellen endigen, welches nothwendig erfolgen mußte, weil von jeder gegebenen ganzen Zahl, genau noch ein mal so viel Nullen, und von jeder zehntheiligen, noch einmal so viel zehntheilige Nullen ihren Produkten (n. §. 41.) zu ertheilen waren, weshalb wir zur allgemeinen Regel dieser Quadratzahlen festsetzen können:

Sind

Sind Zahlen von einer bedeutenden Ziffer gegeben, deren Quadratzahl verlangt wird, so nehme man die Quadratzahl der bedeutenden Ziffer, und gebe derselben zweimal soviel Nullen, wenn es eine ganze Zahl, und eben soviel zehntheilige Stellen, wenn es eine zehntheilige ist, als in den gegebenen Zahlen angetroffen werden.

Demnach ist $50000^2 = 2500000000$, u. s. w.

Ferner $0{,}00009^2 = 0{,}0000000081$ u. s. w.

und $\frac{80^2}{500^2} = \left(\frac{80}{500}\right)^2 = \frac{6400}{250000} = \frac{64}{1500}$.

§. 91.

Nehmen wir dem zweiten Falle gemäß Zahlen von mehr bedeutenden Ziffern, so können wir sie als Größen ansehen, die aus eben so viel verschiedenen Theilen bestehen (§. 11.), und mithin aus denselben nach und nach die einzelnen Produkte bestimmen, aus deren Summe endlich (n. §. 43.) die verlangte Quadratzahl bestehen muß.

Wäre demnach von 46, deren erster Theil 40, und der andere 6 ist, die Quadratzahl zu bestimmen, so setzen wir:

$46 = 40 + 6$

mit $46 = 40 + 6$ multiplizirt

giebt $184 = 40.40 + 40.6$

und $276 = \ldots\ 40.6 + 6.6$

mithin ist $46^2 = 2116 = 40.40 + 40.6 + 40.6 + 6.6$

Da nun hier in den zur Rechten befindlichen einzelnen Produkten $40.40 = 40^2$, $40.6 + 40.6 = 2.40.6$, und $6.6 = 6^2$, so ist nicht allein

$$46^2 = 2116 = 40.40 + \underbrace{40.6 + 40.6} + 6.6;$$

sondern auch $46^2 = 2116 = 40^2 + 2.40.6 + 6^2$

oder $46^2 = 2116 = 1600 + 480 + 36$

Und

Und so werden wir in der zweyten Reihe gewahr, daß die Quadratzahl von 46 die Quadratzahl des ersten Theils 40^2, das doppelte Produkt des ersten Theils in dem zweiten Theile 2.40.6 (nach §. 47.) und die Quadratzahl des zweiten Theils 6^2 enthält; hingegen in der dritten Reihe, daß die Quadratzahlen in ihren eigenthümlichen Stellen (n. v. §.), und das doppelte Produkt der Zehner und Einer in der zweyten Stelle endiget.

Da wir statt 46 jede andere Zahl hätten wählen können, so folgt allgemein, daß die Quadratzahl einer jeden, in zwei Theile getheilten Zahl enthalte:

a. Die Quadratzahl ihres ersten Theils,
b. Das zweifache Produkt des ersten Theils in dem zweiten; und
c. Die Quadratzahl des zweiten Theils.

Demnach ist 1) $4{,}6^2=(4+0{,}6)^2=4^2+\underbrace{2.4.0{,}6}+0{,}6^2$

d. h. $4{,}6^2=21{,}16\;=16+4{,}8+0{,}36$

Ferner 2) $460^2=(400+60)^2=400^2+\underbrace{2.400.60}+60^2$

d. h. $460^2=211600\;=160000+48000+3600$

Weiter 3) $0{,}46^2=(0{,}4+0{,}06)^2=0{,}4^2+\underbrace{2.0{,}4.0{,}06}+0{,}06^2$

d. h. $0{,}46^2=0{,}2116\;=0{,}16+0{,}048+0{,}0036$

Wieder 4) $4600^2=(4000+600)^2=4000^2+\underbrace{2.4000.600}+600^2$

d. h. $4600^2=21160000\;=16000000+4800000+360000$

Endlich 5) $0{,}046^2=(0{,}04+0{,}006)^2=0{,}04^2+\underbrace{2.0{,}04.0{,}006}+0{,}006^2$

d. h. $0{,}046^2=0{,}002116\;=0{,}0016+0{,}00048+0{,}000036$

u. s. w.

Betrachten wir aber auch hier die Stellen, in welchen die zweifachen Produkte endigen, so finden wir nach dem vorigen und gegenwärtigen ersten Beispiel in der zweiten Stelle, die zweifachen Produkte der Zehner und Einer, wie der Einer und Zehntheile; nach dem 2ten und 3ten in der 4ten Stelle, die zweifachen

fachen Produkte der Hunderte und Zehner, wie der Zehntheile und Hunderttheile; nach dem 4ten und 5ten in der 6ten Stelle, die zweifache Produkte der Tausende und Hunderte, wie der Hunderttheile und Tausendtheile u. s. w.; mit einem Wort, daß sämtliche zweifachen Produkte in den geraden Stellen endigen.

Wollten wir ferner die einzelnen Produkte wissen, aus denen eine Quadratzahl von einer dreitheiligen Zahl wie 463 bestehet; so können wir diese anfangs in die beiden Theile $460 + 3$ theilen, und wie vorher setzen:

$$463^2 = (460 + 3)^2 = 460^2 + 2.460.3 + 3^2$$

Da wir aber in diesen einzelnen Produkten die Quadratzahl von 460 antreffen, welche aus den beiden Theilen $400 + 60$ bestehet, und doch alle einzelne Produkte haben möchten, welche die einzelnen Theile der Wurzel in einander multiplizirt geben können; so müssen wir noch die einzelnen Produkte von 460^2 bestimmen, und sie an dessen Stellen setzen:

Weil nun $460^2 = (400 + 60)^2 = 400^2 + 2.400.60 + 60^2$
und $463^2 = (460 + 3)^2 = 460^2 + 2.460.3 + 3^2$ ist,
so folgt, daß auch

$$463^2 = (400 + 60 + 3)^2 = \overbrace{400^2 + 2.400.60 + 60^2} + 2.460.3 + 3^2$$
$$\text{d.h. } 463^2 = 214369 = 160000 + 48000 + 3600 + 2760 + 9$$

An diesen vorgestellten einzelnen Produkten sehen wir also, daß die Quadratzahl einer dreitheiligen Wurzel bestehet:

a. Aus der Quadratzahl des ersten Theils,

b. = dem zweifachen Produkt des ersten Theils im zweyten

c. = der Quadratzahl des zweiten Theils.

d. Aus

d. Aus dem zweifachen Produkt des ersten und zweyten Theils im dritten

e. = der Quadratzahl des dritten Theils.

Eben so würde auch

$$4630^2 = 4000^2 + \underbrace{2.4000.600} + 600 + \underbrace{2.4600.30} + 30^2$$

d. h. $4630^2 = 16000000 + 4800000 + 360000 + 276000 + 900 = 2243600$

Ferner $46300^2 = 40000^2 + \underbrace{2.40000.6000} + 6000^2 + \underbrace{2.46000.300} + 300^2$

d. h. $46300^2 = 1600000000 + 480000000 + 36000000 + 27600000 + 90000 = 2143690000.$

Hingegen $46{,}3^2 = 40^2 + \underbrace{2.20.6} + 6^2 + \underbrace{2.46.0{,}3} + 0{,}3^2$

d. h. $46{,}3^2 = 1600 + 480 + 36 + 27{,}6 + 0{,}09 = 2143{,}69.$

Und $4{,}63^2 = 4^2 + \underbrace{2.4.0{,}6} + 0{,}9^2 + \underbrace{2.4{,}6.0{,}03} + 0{,}03^2$

d. h. $4{,}63^2 = 16 + 4{,}8 + 0{,}36 + 0{,}276 + 0{,}0009 = 21{,}4369$

u. s. w.

Bestimmen wir endlich auf ähnliche Art, die einzelnen Produkte der Quadratzahlen, die von noch mehrtheiligen Zahlen entstehen können, so finden wir, daß sie für jede neue hinzugesetzte bedeutende Ziffern, als ihrem 4ten, 5ten u. s. w. angenommenen Theil, zwei Produkte mehr enthalten; also daß die Quadratzahl einer viertheiligen Zahl, außer den einzelnen Produkten bei einer dreitheiligen, noch ein zweifaches Produkt, aus dem 1ten 2ten, und 3ten in den 4ten Theil, und die Quadratzahl des 4ten Theils; die von einer fünftheiligen Zahl, außer vorigen, noch ein zweifaches Produkt aus dem 1ten, 2ten, 3ten und 4ten in den 5ten Theil, und die Quadratzahl des 5ten Theils erhält u. s. w. Demnach erkennen wir, daß die Quadratzahl einer jeden beliebigen Zahl dieser Art, stets so viel einzelne Quadratzahlen als sie Theile hat, und auch so viel zweifache

sache Produkte weniger eins enthalte, die immer aus dem Produkte der Summe aller vorhergehenden Theile in dem 2ten, 3ten, 4ten ꝛc. Theile entstehen, und auch nach gleicher Ordnung, die Stelle vor den einzelnen Quadratzahlen des 2ten, 3ten, 4ten Theils einnehmen, welcher Bemerkung zufolge wir annehmen können:

Sind Zahlen von mehr als einer bedeutenden Ziffer gegeben, deren Quadratzahl verlangt wird; so mache man

a. Die Quadratzahl des ersten Theils,

b. Das zweifache Produkt aus dem zweiten Theil,

c. Die Quadratzahl des zweiten,

d. Das zweifache Produkt, des ersten und zweiten, in den dritten,

e. Die Quadratzahl des dritten,

f. Das zweifache Produkt des ersten, zweiten und dritten, in den vierten,

g. Die Quadratzahl des vierten, ꝛc. ꝛc.

und fahre so fort, wenn die Zahl mehrere Theile hätte, bis man die Quadratzahl des letzten Theils erhält, und bestimme deren Summe.

Wäre also die Quadratzahl von 9824 zu bestimmen, so setzten wir:

$$9824^2 = 9000^2 + \underbrace{2.9000.800 + 800^2} + \underbrace{2.9800.20 + 20^2} + \underbrace{2.9820.4 + 4^2}$$

d. h. $9824^2 = 81000000 + 14400000 + 640000 + 392000 + 400 + 78560 + 16 = 96510976.$

Und weil die Quadratzahlen der Brüche, deren Glieder mehrere bedeutende Ziffern haben, nach eben der Regel formirt werden können; so ist auch

$$\frac{35^2}{64^2} = \left(\frac{30+5}{60+4}\right) = \frac{30^2+2.30.5+5^2}{60^2+2.60.4+4^2} = \frac{1225}{4096}$$

$$\frac{126^2}{312^2} = \left(\frac{100+20+6}{300+10+2}\right)^2 = \frac{100^2+2.100.20+2.120.6+6^2}{300^2+2.300.10+2.310.2+2^2}$$

$$= \frac{10000+4000+400+1440+36}{90000+6000+100+1240+4} = \frac{15876}{97344}.$$

Man kann bei dieser gegebenen Regel billig fragen: ob man sie bei Bestimmung einer Quadratzahl befolgen müsse, und welche Vortheile sie gewähre? Worauf wir antworten: die Quadratzahlen können oft dadurch leichter gefunden werden, wenn die gegebenen Zahlen nicht mehr als 3 bedeutende Ziffern haben, daß man sie geradezu ineinander multipliziret; enthalten sie aber mehrere, so wird bald gezeigt werden, daß man durch Befolgung dieser Regel, die Quadratzahlen bequemer bestimmt. Was die Vortheile anbelangt, so finden wir sie darinnen, daß wir durch diese Regel alleine die Stellen kennen lernen, in denen sich die verschiedenen Theile der Quadratzahlen endigen, ohne welche Kenntniß wir sonst in der Folge nicht im Stande seyn würden, der entgegengesetzten Forderung: aus einer gegebenen Quadratzahl die Wurzel zu finden, Genüge zu leisten; daher können wir nicht genug anempfehlen, sich ihre Bestimmung recht eigen zu machen. Ueberdem aber kann man nach dieser Regel die Prüfung anstellen, ob eine gefundene Quadratzahl ihre Richtigkeit habe: weshalb sie schon unserer Aufmerksamkeit werth ist.

§. 92.

Da die Berechnung der Quadratzahlen immer beschwerlicher werden muß, je größere Zahlen uns gegeben werden; so dachte man ganz natürlich darauf, diese Arbeit, so viel als möglich, zu erleichtern, welches blos dadurch zu erhalten war, daß man eine Tabelle der Quadratzahlen, zum wenigsten von 1 bis 1000, verfertigte,

die

die man nachher zur bequemern Bestimmung größerer Quadratzahlen anwenden konnte, wie wir bald zeigen werden.

Diese Tabelle aber selbsten auf eine leichte Art zu erhalten, mußte folgende Bemerkung dienen: Nehmen wir von den in natürlicher Ordnung stehenden Zahlen 1.2.3.4 u. s. w. die Quadratzahlen, und ziehen jede von der ihr unmittelbar folgenden ab; so entstehet eine neue Reihe Zahlen, welche die Eigenschaft haben, daß jede um 2 größer ist, als ihre unmittelbar vorhergehende; also finden wir von

der Zahlen-Reihe der natürlichen Ordnung			die Quadratzahlen		die entstehende Reihe
1	=	=	1	=	1
2	=	=	4	=	3
3	=	=	9	=	5
4	=	=	16	=	7
5	=	=	25	=	9
6	=	=	36	=	11
7	=	=	49	=	13
8	=	=	64	=	15
9	=	=	81	=	17
10	=	=	100	=	19
11	=	=	121	=	21
12 rc.	=	=	144 rc.	=	23 rc. rc.

Weil nun hier die Zahlen der dritten Reihe die Differenzen der Quadratzahlen der zweiten Reihe sind; nemlich $3 = 4 - 1$, $5 = 9 - 4$ u. s. w.; und dieselben die Differenz 2 gemein haben, also daß $3 = 1 + 2$, $5 = 3 + 2$, $7 = 5 + 2$ u. s. w. ist; so können wir diese ununterbrochen fortsetzen, wenn wir zu jeder schon bestimmten Zahl 2 addiren, und denn auch aus denselben umgekehrt die Quadratzahlen von den Zahlen der natürlichen Ordnung finden, wenn man nach und nach ihre Zahlen zu der um eine Stelle höher stehenden Quadratzahl addiret. So giebt z. E.

die erste Quadratzahl 1 zur zweiten Zahl 3 dieser Reihe genommen, die Quadratzahl 4; ferner 4 aus der zweiten Reihe, und 5 aus der dritten, die Quadratzahl 9; eben so ist $7+9=16$ u. s. w. endlich auch $81+19=100=10^2$; $100+21=121=11^2$ u. s. w.

Setzen wir demnach alle noch bis 1000 zu zählende Zahlen in die erste Reihe, aber auch in die dritte eine gleiche Menge, deren jede um 2 zunimmt, und addiren dieselben zu jeder eine Stelle höher stehenden Quadratzahl der zweiten Reihe, so erhalten wir bequem die verlangten Quadratzahlen von 1 bis 1000, die wir endlich zur bequemen Uebersicht auf 2 Seiten in eine Tabelle bringen können, wie es die erste am Ende befindliche zeigt.

In derselben befinden sich auf jeder Seite 11 Zahlenreihen, davon die erste auf der ersten Seite die Zahlen von 1 bis 50, und die auf der zweiten die Zahlen von 51 bis 100 enthält. Neben diesen Zahlen stehen ihre Quadratzahlen in der zweiten Reihe, über der eine 0 gesetzt ist, anzuzeigen, daß in ihr keine Quadratzahl der Hunderte gefunden werden kann. In der dritten Reihe stehen nun die Quadratzahlen von 101, 102 ꝛc. ꝛc., welches, nächst dem über ihr befindlichen 100, die in der ersten Reihe, mit ihnen auf gleicher Reihe stehenden Zahlen 1, 2, ꝛc. ꝛc. anzeigen. Ein Gleiches muß also auch von den Quadratzahlen der 4ten, 5ten ꝛc. Reihe verstanden werden, über welchen die Zahlen 200, 300 ꝛc. gesetzet sind.

§. 93.

Da wir jetzt die Quadratzahlen von 1 bis 1000 haben, so können wir bequem alle mögliche Quadratzahlen gegebener Zahlen bestimmen, deren Werth mehr oder weniger als 1000 beträgt, wenn wir die zuletztgegebene Regel befolgen, und uns der angezeigten Tabelle bedienen.

Gesetzt, man verlangte die Quadratzahl von 34, so nehmen wir die erste Seite, suchen in der ersten Reihe die Zahl 34, und nehmen die ihr zunächst unter der oben

mit o bezeichneten Reihe stehende Zahl 1156, als die verlangte Quadratzahl. Verlangte man sie von 359, so nehmen wir in der ersten Reihe der zweiten Seite die Zahl 59, und auf ihrer Zeile, die in der oben mit 300 bezeichneten Reihe stehende Zahl 128881 u. s. w.

Wollte man hingegen die Quadratzahl von 3456 haben; so würden wir sie nicht in der Tabelle antreffen; da sie aber in zwei Theile getheilet werden kann, so folgt (n. §. 91.), daß

$$3456^2 = (3450+6)^2 = 3450^2 + 2.3450.6 + 6^2 \text{ ist.}$$

Nun ist in der Tabelle $345^2 = 119025$ also $3450^2 = 11902500$
und $2.3450.6 = 41400$
endlich $6^2 = 36$

mithin $3456^2 = 3450^2 + 2.3450.6 + 6^2 = 11943936$

Wäre ferner $372,854^2 = (372+0,854)^2$ gegeben;
so ist wieder $372^2 = 138384,$
$2.372.0,854 = 335,376$
und $0,854^2 = 0,729316$

folglich $372,854^2 = 138720,105316$

Offenbar würden hier mehrere Beispiele überflüßig seyn, weil wir im vorigen, in Betreff der Abkürzung dieser Rechnung, genugsam erkennen, nicht allein wie nützlich obige Regel und Tabelle sind, sondern auch, auf welche Art wir beide bei noch größeren Zahlen anwenden können, welches nur in großen Rechnungen vorzukommen pflegt.

Um aber eine Anwendung dieser Zahlen zu zeigen, so gedenke man sich die viereckigten pyramidenähnlichen Kugelhaufen, (wie Fig. 11.) welche von solchen Kugelschichten (wie Fig. 6..9.) formiret werden, die eine gleiche Anzahl Kugeln, sowohl in der länge als in der Breite haben.

Würde demnach gefragt: wie viel Kugeln sind in der Schicht eines viereckigten Haufens enthalten, deren

eine Reihe 16 Kugeln hat; so müßte man antworten: sie enthalte 16 . 16 = 256 Kugeln.

Hätte die Reihe 24 Kugeln, so müßte ihre Schicht 556 Kugeln haben ꝛc.

Von den Quadratwurzeln.

§. 94.

Da wir nun die zweite Bestimmung zu leisten haben, nemlich: aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel, oder eine solche Zahl zu finden, die mit sich selbst multiplizirt, die gegebene hervorbringt; (§. 88.) so wollen wir, dieselbe anzuzeigen, stets den gegebenen Zahlen dieses Zeichen $\sqrt[2]{}$ oder $\sqrt{}$ vorsetzen, welches blos ein verzogenes lateinisches r, als der Anfangs-Buchstabe des Wortes radix ist.

Demnach wäre $\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$; $\sqrt{0,25} = 0,5$, $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$ u. s. w.

§. 95.

Um aber auch hier vom leichtern zum schwerern überzutreten, nehmen wir die gegebenen Zahlen unter zwei Fälle; als

a. Mögen sie höchstens zwei; und

b. mehrere bedeutende Ziffern haben.

Sollte also nach dem ersten Falle die Quadratwurzel einer Zahl, welche höchstens zwei bedeutende Ziffern, und entweder eine gerade Anzahl Nullen oder zehntheilige Stellen hat, bestimmt werden; so nehme man die Wurzel, welche die bedeutenden Ziffern, als eine Zahl der Einer genommen, bestimmen, und ertheile derselben halb soviel Nullen, oder zehntheilige Stellen, als die gegebene Zahl hat.

Wäre

Wäre die Quadratwurzel von 49 zu bestimmen, so würden wir setzen $\sqrt{49} = 7$, weil $7 . 7 = 49$ ist.

Würde hingegen der Ausdruck $\sqrt{360000}$ gegeben; so müßten wir sagen: da $\sqrt{36} = 6$, und an der 36 noch vier Nullen angehängt sind, so muß die Wurzel 6 noch zwei erhalten, und mithin ist $\sqrt{360000} = 600$.

Eben so würde $\sqrt{0{,}0016} = 0{,}04$; $\sqrt{0{,}000004} = 0{,}002$ u. s. w. seyn.

Endlich ist $\sqrt{\left(\frac{4}{8100}\right)} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{8100}} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$ u. s. w.

Die Richtigkeit dieser gegebenen Regel ist von selbst einleuchtend, wenn wir uns nur erinnern, daß jede Quadratzahl von einer Zahl, die blos eine bedeutende Ziffer mit einer beliebigen Menge Nullen oder zehntheilige Stellen hat, stets noch einmal soviel Nullen oder zehntheilige Stellen erhalten muß (n. §. 90.), von welcher anerkannten Wahrheit hier die Regel geradezu umgekehrt ist gefolgert worden. Und so sehen wir, daß die Quadratwurzeln der unterm ersten Fall gehörigen Zahlen ausnehmend leicht zu bestimmen sind, und keiner mehreren Beispiele bedürfen.

§. 96.

Soll aber nach dem zweiten Falle von einer Zahl, welche mehr als zwei bedeutende Ziffern hat, die Quadratwurzel bestimmt werden; so ist offenbar, daß wir für dieselben eben soviele einzelne Quadratwurzeln erhalten müssen, (n. §. 91.) als die gegebene Zahl einzelne Quadratzahlen enthält.

Da nun diese in den ungeraden Stellen endigen, so können wir ihre Menge, also auch die Menge ihrer einzelnen Wurzeln, sogleich dadurch erfahren, daß wir, von der Stelle der Einer an, die gegebene Zahl in Klassen zu zwei Ziffern mit Strichen thei-

 len,

len, weil dann die Stellen, in welchen die einzelnen Quadratzahlen endigen, vor den Strichen, und diejenigen, in welchen die zweifachen Produkte endigen, hinter denselben angetroffen werden. Hat man dieses beobachtet, so sucht man für die erste Klasse, den ersten Theil der Wurzel, macht ihre Quadratzahl, zieht sie von der Zahl der ersten Klasse ab, und setzt zum Rest die hinter dem Strich befindliche Ziffer, welche neue Zahl das zweifache Produkt des ersten Theils in dem noch unbekannten zweiten Theile der Wurzel enthält. Um also diesen unbekannten Theil zu finden, betrachten wir ihn als den unbekannten Faktor, und den ersten Theil als den bekannten, multipliziren diesen, dem 57sten §. gemäß, mit 2, setzen die entstehende Zahl als Divisor, und theilen mit ihr in die vorhandene Zahl; so bekommen wir den andern Faktor zum Quozienten, mit welchem wir den Divisor multipliziren, und das entstehende Produkt von der getheilten Zahl abziehen. Rücken wir wieder die nächste Ziffer zum Rest, so erhalten wir die Zahl, welche die Quadratzahl des zweiten Theils enthält; also machen wir die Quadratzahl des zweiten Theils, und ziehen sie von der vorhandenen Zahl ab. Fügen wir nun dem Reste die nächste Ziffer bei, so entstehet die Zahl, welche das zweifache Produkt des ersten und zweiten Theils der Wurzel in dem dritten Theile enthält, von dem also die beiden ersten bekannten Theile zusammengenommen, als ein Faktor, und der dritte, als der unbekannte, noch wie der zweite Theil der Wurzel gefunden werden kann. Gleiche Bewandniß hat es auch mit dem zu bestimmenden 4ten, 5ten ꝛc. Theile der Wurzel, wie folgende Beispiele zeigen:

Gesetzt, daß der Ausdruck $\sqrt{214369}$ aufzulösen wäre, so setzen wir:

$$21|43|69|400 + 60 + 3 = 463$$
$$400^2 = 400 \cdot 400 = 16$$
$$400.2 = 800)\ 54$$
$$400.2.60 = 800.60 = 48$$
$$63$$
$$60^2 = 60.60 = 36$$
$$460.2 = 920)\ 276$$
$$460.2.3 = 920.3 = 276$$
$$9$$
$$3^2 = 9$$

und sprechen: von 21, als der Zahl der höchsten Klasse, kann nicht 5 die Quadratwurzel seyn, weil $5^2 = 25$ ist, sondern man muß 4 dafür annehmen, weil $4^2 = 16$, weniger als 21 beträgt. Da aber 21 in der fünften Stelle endiget, so muß auch 16 in diese Stelle gebracht, und folglich nicht 4, sondern eigentlich 400 deren Wurzel werden (§. 90); also hängen wir hier der 4 so viel Nullen an, als Klassen nach der Zahl 21 folgen, machen sodann eigentlich von 400 die Quadratzahl 160000, und ziehen sie von 210000 ab, wo wir zum Rest 50000, oder 5 Einheiten der 5ten Stelle behalten. Nun nehmen wir die nächste Ziffer 4 zum Rest, und erhalten 54 Einheiten der vierten Stelle oder 54000, welche Zahl das zweifache Produkt des ersten Theils 400 in dem unbekannten zweiten Theil enthält; um also diesen zu erhalten, so multipliziren wir (nach §. 57,) 400 mit 2, welches 800 giebt, und theilen mit dieser Zahl in 54000, oder mit 8 in 540, wodurch wir 60 erhalten, welcher Quozient 60 der zweite Theil der Wurzel ist; wird er nun mit 800 multiplizirt, so erhalten wir das zweifache Produkt des ersten Theils in den zweiten, oder $400.2.60 = 48000$, das von 54000 abgezogen, 6000 oder 6 Einheiten der 4ten Stelle übrig läßt. Setzen wir wiederum die nächste Ziffer 3 zum Rest, so entsteht die Zahl 63, welche 63

Einheiten der dritten Stelle oder 6300, die Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel enthält; mithin machen wir die Quadratzahl von 60, und ziehen 3600 oder 36 Einheiten der dritten Stelle von 63 ab, wo dann 27 Einheiten dieser Stelle übrig bleiben, zu denen die nächste Ziffer 6 gethan, 276 Einheiten der zweiten Stelle oder 2760 giebt, die das zweifache Produkt des ersten und zweiten Theils in dem dritten Theil der Wurzel enthält, dessen einer Faktor 460 ist; nehmen wir diesen also doppelt, so erhalten wir 920, und es ist $2760 : 920 = 3$ der dritte Theil der Wurzel, und das zweifache Produkt $920 . 3 = 2760$, das von 2760 abgezogen, keinen Rest läßt. Setzen wir endlich die letzte Ziffer 9 herunter, so enthält diese allein die Quadratzahl des dritten Theils, oder 3^2, die sich mit 9 genau aufhebt; und addiren wir die Theile der Quadratwurzel, so finden wir $400 + 60 + 3 = \sqrt{214369}$.

Hierbei ist nun zu bemerken, daß nicht nöthig sey, die einzelnen Theile der Wurzel nach ihrem Werthe erst hinzusetzen, und zuletzt deren Summe zu machen; sondern, daß wir anfangs nicht auf ihren Werth achten dürfen, sobald wir nur die dem ersten Theile nachfolgenden, wie bei Bestimmung des Quozienten (§. 54.) nach und nach zur Rechten setzen.

Ferner, daß auch die zur Seiten angezeiten Produkte, welche blos zur Erklärung hingesetzt wurden, gänzlich wegfallen können, wenn wir sie nur in die Stelle setzen, die sie nach ihrem Werthe einnehmen sollen, wodurch die Rechnung nachstehendes Ansehen erhält.

```
   2 1|4 3|6 9|463
   1 6
   ———
8) 5 4
   4 8
   ———
     6 3
     3 6
     ———
92)  2 7 6
     2 7 6
     —————
         9
         9
```

wo wir sprechen: von 21 läßt sich die Quadratzahl von 4 abziehen; da nun $4^2 = 16$, so ist $21 - 16 = 5$, zu welchem Rest die 4 gerückt, 54 giebt; ferner $2.4 = 8$, und $54 : 8 = 6$; da nun $6.8 = 48$, so ist $54 - 48 = 6$, zu welchem Rest die Ziffer 3 gerückt 63 giebt; da aber $6^2 = 36$, so ist $63 - 36 = 27$, zu welchem die Ziffer 6 gerückt, 276 giebt. Weil nun $46.2 = 92$, und $276 : 92 = 3$, so ist $3.92 = 276$, und $276 - 276$ läßt keinen Rest; endlich enthält die letzte Ziffer 9 die Quadratzahl von 3, mithin ist 463 die verlangte Wurzel.

Würde ferner der Ausdruck $\sqrt{0{,}970225}$ gegeben, so setzten wir:

```
       0,|9 7|0 2|2 5|0,985
       0
       ———
         9 7
         8 1
         ———
18)    1 6 0
       1 4 4
       —————
         1 6 2
           6 4
         —————
196)     9 8 2
         9 8 0
         —————
             2 5
             2 5
```

und so würde 0,985 die verlangte Wurzel seyn.

Da

Da die Quadratzahlen der Zehntheile, Hunderttheile ꝛc. ꝛc. in der dritten, fünften ꝛc. Stelle endigen (§. 90.) so mußte hier die gegebene Zahl, von der Stelle der Einer an, nach der rechten Hand zu in Klassen getheilet werden, damit gedachte Stellen wiederum vor den Strichen zu stehen kamen.

Und wäre der Ausdruck $\sqrt{2150,1769}$ aufzulösen, so setzten wir:

```
      2 1|5 0,|1 7|6 9|46,37
      1 6
      ------
   8) 5 5
      4 8
      ------
        7 0
        3 6
        ------
  92) 3 4, 1
      2 7, 6
      --------
        6, 5 7
             9
        --------
 926)   6, 4 8 6
        6, 4 8 2
        --------
             4 9
             4 9
             ---
```

wo wir also $\sqrt{2150,1769} = 46,37$ erhalten.

Eben so würde

$\sqrt{63504000000} = 252000$; $\sqrt{1713960000} = 41400$, u. s. w.

ferner $\sqrt{0,00000080125} = 0,000895$; $\sqrt{0,0000484416} = 0,00696$ u. s. w.

und $\sqrt{299072,265625} = 546,875$; $\sqrt{80,4604} = 8,98$ u. s. w. seyn.

Und weil bei den Wurzeln der Brüche kein anderer Unterschied statt findet, als daß sie aus ihren Gliedern bestimmt werden; so folgt, daß auch

Uebri-

$$\sqrt{\left(\frac{2916}{440896}\right)} = \frac{\sqrt{2916}}{\sqrt{440896}} = \frac{54}{664} = \frac{27}{332}$$

$$\sqrt{\left(\frac{262144}{64}\right)} = \frac{\sqrt{262144}}{\sqrt{64}} = \frac{412}{8} = 64 \text{ ist u. s. w.}$$

Uebrigens ist noch zu erinnern, daß wir vor Bestimmung der einzelnen Theilen der Wurzel stets auf ihre nachher zu formirenden und abzuziehenden Quadratzahlen Rücksicht nehmen müssen, damit wir dieselben nicht zu groß ansetzen, welches sich oft erst dann entdecket, wann ihre Quadratzahlen sollen abgezogen werden. Hätte man aber wirklich irgend einen Theil zu groß genommen, so muß man denselben um eine Einheit vermindern, und nachher mit diesem bestimmten Theile eben so verfahren, wie bisher gezeigt worden.

Ferner; träfe es sich, daß ein Divisor in die zu theilende Zahl keinmal enthalten ist, so müssen wir solches durch 0 anzeigen, (aus eben den Gründen, die bei der Division (§. 55 in d. Anm.) gegeben sind) sodann die zwei nächsten Ziffern der gegebenen Zahl zur theilenden herunter setzen, dem Divisor die 0 der Wurzel beifügen, und endlich mit diesem, in die um zwei Ziffern vermehrte Zahl von neuem theilen.

Beide Fälle in einem Beispiel anschaulich zu machen, sey uns der Ausdruck $\sqrt{65221774,38480001}$ gegeben, den wir aufzulösen gewöhnlicherweise setzen:

```
                                               5
 6 5|2 2|1 7|7 4,|3 8|4 8|0 0|0 1|807~~6~~,9999
 6 4
 16)  1 2 2 1
160)  1 1 2 0
      1 0 1 7
          4 9
1614) 9 6 8 7
      9 6 8 4
          3 4
1614) 9 6 8 7
      8 0 7 0
    1 6 1 7 4
          2 5
16150) 1 6 1 4 9 3
       1 4 5 3 5 0
       1 6 1 4 3 8
                 8 1
161518) 1 6 1 3 5 7 4
        1 4 5 3 6 6 2
        1 5 9 9 1 2 8
                  8 1
1615198) 1 5 9 9 0 4 7 0
         1 4 5 3 6 7 8 2
         1 4 5 3 6 8 8 0
                     8 1
16151998) 1 4 5 3 6 7 9 9 0
          1 4 5 3 6 7 9 8 2
                        8 1
                        8 1
```

und sprechen: von 65 ist 8 die Quadratwurzel; da nun $8^2 = 64$, so ist $65 - 64 = 1$, zu welchem Rest die nächste Ziffer 2 herunter gerückt die Zahl 12 bestimmt;

stimmt; ferner 2.8=16, und 12:16=0, nach der zweiten Erinnerung; demnach rücken wir zu der Zahl 12 noch die beiden folgenden Ziffern 21 herunter, und erhalten die Zahl 1221; vermehren sodann den Divisor 16 um 0, welches eben das Produkt 2.80 bestimmt, und sagen 122:16, oder auch 12:1=7; da nun 160.7=1120, so ist 1221—1120=101, zu welchem Rest wiederum die nächste Ziffer 7 herunter genommen, die Zahl 1017 giebt; weil aber auch $7^2=49$, so ist 1017—49=968, zu welcher Zahl die nächste Ziffer 7 gefügt, 9687 giebt. Ferner sagen wir: 807.2=1614, und 9687:1614=6; da nun 6.1614=9684, so ist 9687—9684=3, zu welchem Rest die nächste Ziffer 4 heruntergesetzt, die Zahl 34 bestimmt, die offenbar kleiner als die Quadratzahl von 6, nemlich 36 ist, welche von ihr abgezogen werden soll. Demnach schließen wir, daß dieser Theil der Wurzel, nemlich 6 zu groß genommen worden ist, streichen denselben durch, vermindern ihn, der ersten Erinnerung gemäß, um eine Einheit, also, daß wir 5 hinsetzen, machen einen Strich unter die 34, bringen unter ihm von neuem die getheilte Zahl 9687, und vor dieser den Divisor 1614, und sagen: 5.1614=8070, und 9687—8070=1617, zu welchem Rest die nächste Ziffer 4 genommen 16174 giebt; und da auch $5^2=25$, so ist 16174—25=16149. Fahren wir endlich auf ähnliche Art in der Rechnung fort, so sehen wir, daß 8075,9999 die verlangte Quadratwurzel sey.

§. 97.

Da außer den bisherigen Quadratzahlen auch andere Zahlen gegeben werden können, von welchen man die Quadratwurzeln genau bestimmen soll; so entstehet die Frage: ob dieses möglich sey? weil wir sie aber mit nein! beantworten müssen, so werden die Wurzeln dieser Zahlen **unaussprechliche** oder **Irrazionalzahlen** genannt.

genannt. So würden es demnach $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ rc. seyn, weil keine von diesen unter dem Wurzelzeichen stehenden Zahlen, wirkliche Quadratzahlen sind.

Uns aber auch von der Behauptung zu überzeugen, brauchen wir nur für eine dergleichen Zahl den Beweis zu führen, indem wir ihn für jede andere auf gleiche Art machen können. Wäre also die Zahl 8 zu dieser Absicht gegeben, so schließen wir: da 8 zwischen die Quadratzahlen 4 und 9 fällt, und dieser ihre Quadratwurzeln 2 und 3 sind, so muß die Wurzel von 8 größer als 2 und kleiner als 3, d. h. (zufolge §. 65.) irgend ein unächter Bruch, wie z. E. $\frac{5}{2}$ seyn. Es muß aber dieser Bruch, mit sich selbst multiplizirt, die Zahl 8 hervorbringen (n. §. 95.), und dessen Glieder sind einfache Zahlen verschiedener Art, mithin auch die Faktores der Glieder vom Bruch $\frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 2}$, welcher seine Quadratzahl bestimmet, und wir wissen, daß in diesem Falle (zufolge §. 78.) des Zählers seine die vom Nenner nicht genau enthalten können; also folgt, daß aus dem als Quadratwurzel gedachten Bruche $\frac{5}{2}$ nicht die Zahl 8 zur Quadratzahl entstehen, und mithin auch keine Quadratwurzel von irgend einer Zahl, wenn sie keine wirkliche Quadratzahl ist, genau angegeben werden kann, d. h. daß sämtliche Irrazionalzahlen außer dem Gebiethe sowohl der ganzen, als der Bruchzahlen gelegen sind.

§. 98.

Ohngeachtet wir nun überzeugt sind, daß der Werth einer Irrazionalzahl nicht genau bestimmt werden kann, so können wir uns doch demselben so sehr nähern, als einem gefällig ist; daher wir es nach Beschaffenheit der gegebenen Größen so thun, daß die fehlende Größe für nichts

nichts zu achten ist, und darum dann dergleichen Rechnung, die Wurzel durch Näherung zu finden, zu nennen pflegen, wie hier gezeiget werden muß.

Sollten wir also den Ausdruck $\sqrt{8}$ auflösen, und der in der Bestimmung obwaltende Fehler kein Hunderttheilchen betragen; so setzen wir, weil $8 = 8{,}0000$ ist,

```
    8,|0 0|0 0|2,82
    4,
 4)4,0
    3,2
      8 0
      6 4
 56)1 6 0
      1 1 2
        4 8 0
            4
        4 7 6
```

und indem wir die Wurzel auf gewöhnliche Art suchen, so finden wir dieselbe 2,82, die von der wahren Wurzel noch um kein Hunderttheilchen verschieden seyn kann, weil man sonst 3 Hunderttheilchen, statt der 2 hätte nehmen können.

Wollten wir aber für die Stelle der Hunderttheilchen wissen, ob man weniger fehle, wenn man 3 Hunderttheilchen statt deren 2 setze, so müssen wir die Wurzel bis auf Tausendtheilchen bestimmen; und finden wir dann, daß die Menge der Tausendtheilchen mehr als 0,005 beträgt, so nehmen wir für 2 Hunderttheilchen lieber 3, weil man dadurch weniger vom wahren Werthe der Wurzel abweichet; und wirklich finden wir nach geschehener Rechnung, daß man $2{,}83 = \sqrt{8}$ nehmen könne.

Ver-

Verfahren wir bei andern auf ähnliche Art, bis zur Bestimmung auf ein Tausendtheilchen; so finden wir, daß

$\sqrt{11} = 3,317$; $\sqrt{3,57} = 1,889$; $\sqrt{5370} = 73,28$; $\sqrt{0,07583} = 0,2675$

$\sqrt{594674} = 771,151$; $\sqrt{634,76525} = 25,194$ u. s. w.

und $\sqrt{\left(\frac{35276}{64}\right)} = \sqrt{551,1875} = 23,477$; $\sqrt{\left(\frac{2916}{44089}\right)} = \sqrt{0,06613} = 0,081$;

$\sqrt{\left(\frac{777924}{82944}\right)} = \sqrt{9,378906}$ u. s. w.

Bei diesen Brüchen thut man jederzeit wohl, sie sogleich in eine zehntheilige Zahl zu verwandeln, und von dieser die Wurzel zu nehmen, wie hier wirklich ist beobachtet worden.

§. 99.

Endlich müssen wir noch bemerken, daß die Ausziehung der Quadratwurzeln mancherlei Abkürzung leidet, die wir hier nach einander anzeigen wollen.

a. Können wir nach jedem gefundenen Theile der Wurzel die Ziffern jeder folgenden Klasse zugleich herunter setzen, von welchen dann nicht erst das zweifache Produkt, sondern mit ihm zugleich die Quadratzahl des gefundenen Theils bestimmt, und abgezogen wird.

Wäre also, wie oben, der Ausdruck $\sqrt{214369}$ gegeben; so könnten wir setzen:

```
                21|43|69|463
                16
                ------
             8) 543
8.6+6² = 516
                -------
            92) 2769
92.3+3² = 2769
```

und sagen: von 21 ist 4 die Quadratwurzel; $4 \cdot 4 = 16$ von 21 läßt 5, zu der die folgende Klasse gerückt 543 giebt; ferner

Ferner 2 mal 4 ist 8, in 54 giebt 6 zum zweiten Theil der Wurzel, 6 mal 6 ist 36, von der wir die 6 hinsetzen, 6 mal 8 ist 48 und vorige 3 giebt 51, die wir unter 54 bringen, und 543 — 416 = 27 zu der die nächste Klasse gerückt, 2769 bestimmt. Endlich 2 mal 46 ist 92 in 276 giebt 3; 3 mal 3 ist 9; 3 mal 2 ist 6, und 3 mal 9 ist 27, welche einzelne Produkte von der getheilten Zahl abgezogen nichts zum Rest lassen.

b. Nehmen wir bei der vorigen Abkürzung noch diejenige wahr, welche bei der Division (§. 61. b.) gezeigt worden ist, so würden wir, wenn √0,960225 gegeben wäre, setzen:

```
    0,|9 7|0 2|2 5|0,985
18) 1 6 0 2
196)  9 8 2 5
```

c. Haben wir endlich die Tabelle der Quadratzahlen von 1 bis 1000, so nehmen wir die 3 ersten Klassen als eine Zahl der Einer, bestimmen alsobald die Wurzel der ersten Klasse, die wir als Hunderte nehmen, suchen sodann in der Reihe dieser Hunderte in der Tabelle, die der Zahl von den drei Klassen am nächsten kommende Zahl, deren beide fehlende Wurzeltheile die auf derselben Zeile in der ersten Reihe befindliche Zahl giebt, ziehen sie ab, und verfahren mit den übrigen Klassen, wie bisher geschehen.

Wäre also der Ausdruck √2150,1769 gegeben, so setzen wir:

```
     2 1|5 0,|1 7|6 9|46,37
     2 1|4 3,|6 9|
926) 6, 4 8 6 9
     6, 4 8 6 9
```

```
Oder auch 2 1|5 0,|1 7,|6 9|46,37
     926) 6,|4 8,|6 9
```

und

und sagen: von 21 ist 4 die Wurzel, also suchen wir in der Tabelle unter 400 die Zahl 215017, wo wir 214269 antreffen, die ihr am nächsten kömmt, und welche die Quadratzahl von 463 ist, welches wir an 63 in der ersten Reihe erkennen; wir ziehen sie also ab, setzen zum Rest die folgende Klasse, und erhalten 64869, welche mit 2.463 = 926 getheilet, die Zahl 7 giebt, u. s. w. und weil endlich zwei Klassen der zehntheiligen Stellen vorhanden sind, so muß auch die Wurzel zwei zehntheilige Stellen erhalten.

Um eine Anwendung von diesen Zahlen zu machen, erinnern wir uns an die Schichten der viereckigten Kugelhaufen.

Würde also gefragt: Wieviel müssen von 144 Kugeln in eine Reihe gelegt werden, damit man von ihnen eine viereckigte Schicht erhalte? so müßte man antworten: $\sqrt{144} = 12$ Kugeln.

Sollte aber eine solche Menge Kugeln gegeben werden, aus welchen keine Quadratwurzel genau zu erhalten wäre, so muß man sich begnügen, vermittelst derselben bestimmen zu können, welche möglich größte Schicht von ihnen formiret werden könne.

So z. B. werde gefragt: Wenn von 1730 Kugeln eine viereckigte Schicht gelegt werden soll, wieviele muß jede Reihe haben?

```
Man setze  1 7|3 0|4 1
           1 6|   1
          ------------
          8) 1 3 0
             -----
               4 9;
```

also behält man noch 49 Kugeln übrig, und die größte Schicht, welche von 1730 gelegt werden kann, enthält 1730 — 49 = 1681 Kugeln, und hat zu jeder Reihe 41 Kugeln.

Und weil auch die $\sqrt{49} = 7$, so läßt sich von den 49 Kugeln noch eine kleinere Schicht legen, die in jeder Reihe 7 Kugeln hat.

Von den Kubikzahlen.

§. 100.

Wenn man eine Quadratzahl mit ihrer Wurzel multiplizirt, so wird deren entstehendes Produkt eine Kubikzahl genannt.

Da nun eine Quadratzahl ein Produkt zweier gleichen Zahlen ist, so muß dieser Erklärung gemäß, jede **Kubikzahl ein Produkt dreier gleichen Zahlen,** oder Faktores seyn; ihre Benennung ist ebenfalls aus der Geometrie hergenommen, wo der Inhalt eines Kubi oder Würfels bestimmt wird, wenn man das Maß seiner Grundfläche, die ein Quadrat bildet, mit dem Maße der Höhe multipliziret.

Und weil auch hier von einer Zahl nur eine einige Kubikzahl bestimmt wird, woraus umgekehrt folgt, daß aus dieser wiederum nur eine einige zu finden ist, aus welcher sie entstehen kann; so wollen wir diese, verglichen mit jener, die **Kubikwurzel** nennen. Verlangte man demnach die **Kubikzahl** von 2, so würden wir setzen: 2.2.2 = 8, mithin wahrnehmen, daß 8 die **Kubikzahl** von 2; hingegen 2, die **Kubikwurzel** von 8 wäre.

Wir sehen also, daß für jede gegebene Zahl, ähnliche Bestimmungen wie bei dem §. 89. statt finden; nemlich, daß entweder ihre Kubikzahl, oder ihre Kubikwurzel verlangt werden kann; deshalb wollen wir auch hier eben dieselbe Ordnung halten, welche bei den Quadratzahlen (§. 90. 91.) beobachtet worden ist. Demnach suchen wir erst die Eigenschaften der Kubikzahlen, welche anzuzeigen, die Ziffer 3 der gegebenen Zahl etwas höher zur Rechten gesetzt, und deren Exponent genannt wird, weil die unter ihr stehende Zahl **dreimal als Faktor** zu setzen ist.

So würden also 3^3; $0{,}7^3$; und $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^3}{6^3}$ u. s. w.

die Kubikzahlen von 3; von 0,7; und von $\frac{5}{6}$ 2c. anzeigen,

weil $3^3 = 3^2 . 3 = 9 . 3 = 27.$

$0{,}7^3 = 0{,}7^2 . 0{,}7 = 0{,}49 . 0{,}7 = 0{,}343.$

$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^2 . 5}{6^2 . 6} = \frac{25 . 5}{36 . 6} = \frac{125}{216}$ u. s. w. ist.

§. 101.

Um nun die Eigenschaften der Kubikzahlen zu entdecken, betrachten wir die gegebenen Zahlen unter folgenden zwei Fällen; als

a. Mögen sie eine bedeutende Ziffer; und
b. derselben mehrere haben.

Erster Fall. Da wir leicht alle unter diesem Fall gehörigen Kubikzahlen bestimmen können, wenn wir die Kubikzahlen von den Zahlen der Einer kennen, so setzen wir diese samt ihren Quadratzahlen, in folgende kleine Tabelle, um sie uns eigen zu machen.

Die Zahlen	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Quadratzahlen	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.
Kubikzahlen	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

Wollten wir also den Ausdruck 8^3 auflösen, so nehmen wir die unter 8 in der ersten Reihe stehende Kubikzahl 512; und eben so ist $6^3 = 216$; $9^3 = 729$; $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$ u. s. w.

Nehmen wir nunmehro eben diese Zahlen, und machen sie zehnmal, hundertmal, tausendmal 2c. größer oder kleiner, und bestimmen ihre Kubikzahlen, so erhalten wir nach und nach folgende; nemlich für die ganzen Zahlen

$10^3 = 10^2 . 10 = 100 . 10 = 1000$
$90^3 = 90^2 . 90 = 8100 . 90 = 729000$
$100^3 = 100^2 . 100 = 10000 . 100 = 1000000$
$1000^3 = 1000^2 . 1000 = 1000000 . 1000 = 1000000000$
$8000^3 = 8000^2 . 8000 = 64000000 . 80000 = 512000000000$ u.s.w.

Hingegen für die zehntheiligen Zahlen:

$0{,}1^3 = 0{,}1^2 . 0{,}1 = 0{,}01 . 0{,}1 = 0{,}001$
$0{,}6^3 = 0{,}6^2\ 0{,}6 = 0{,}36 . 0{,}6 = 0{,}216$
$0{,}01^3 = 0{,}01^2 . 0{,}01 = 0{,}0001 . 0{,}01 = 0{,}000001$
$0{,}07^3 = 0{,}07^2 . 0{,}07 = 0{,}0049 . 0\ 07 = 0{,}000343$
$0{,}002^3 = 0{,}002^2 . 0{,}002 = 0{,}000004 . 0{,}002 = 0{,}000000008$
$0{,}005 = 0{,}005^2 . 0{,}005 = 0{,}000025 . 0{,}005 = 0{,}000000125$ u.s.w.

Achten wir hier auf die Stellen, worinnen jede Kubikzahl endiget, so finden wir, daß die Kubikzahlen den Zehnern und Zehntheilen, in der vierten Stelle links und rechts, die von den Hunderten und Hundertheile eben so in der 7ten Stelle u. s. w. endigen, welches so kommen mußte, weil die Kubikzahl von jeder ganzen Zahl noch einmal mehr Nullen als ihre Quadratzahl, mithin dreimal so viele Nullen, und die von jeder zehntheiligen eben soviele zehntheilige Stellen erhalten muß. Wir können demnach festsetzen:

Die Kubikzahl einer jeden beliebigen mit einer bedeutenden Ziffer gegebenen Zahl zu bestimmen, nehme man die Kubikzahl der bedeutenden Ziffer, gebe ihr dreimal soviel Nullen, oder zehntheilige Stellen, als die gegebene Zahl Nullen oder zehntheilige Stellen hat.

Mithin ist $300000^3 = 27000000000000000$; $5000^3 = 125000000000$ u. s. w.

und $0{,}0000009^3 = 0{,}000000000000000000729$; $0{,}006^3 = 0{,}000000216$ u. s. w.

und eben so $\left(\frac{40}{500}\right)^3 = \frac{40^3}{500^3} = \frac{64000}{125000000}$; $\left(\frac{3}{70}\right)^3 = \frac{3^3}{70^3} = \frac{27}{343000}$ u. s. w.

 §. 102.

§. 102.

Erhalten wir aber dem zweiten Fall gemäß, Zahlen von mehreren bedeutenden Ziffern, so können wir, wie oben bei den Quadratzahlen (§. 91.), nach ihren verschiedenen Theilen, die einzelnen Produkte bestimmen, aus deren Summe die Kubikzahl bestehet, und nach denselben eine Regel festsetzen, durch die zum wenigsten eine schon vorgefundene Zahl berichtiget werden kann.

Wäre also wiederum die Zahl 46 gegeben, davon die Kubikzahl bestimmt werden sollte, so setzen wir:

$46 = 40 + 6$

mit $46 = 40 + 6$ multiplizirt,

giebt $46^2 = (40+6)^2 = 40^2 + 2.40.6 + 6^2$ (nach §. 91.), und wiederum

mit $46 = 40 + 6 \quad = 40 + 6$

giebt $46^3 = (40+6)^3 = 40^2.40 + 2.40.40.6 + 40.6^2 + 40^2.6 + 2.40.6.6 + 6^2.6.$

Da nun von denen hier zur Rechten befindlichen einzelnen Produkten $40^2 . 40 = 40^3$; $2 . 40 . 40 . 6 = 2 . 40^2 . 6$; $2 . 40 . 6 . 6 = 2 . 40 . 6^2$, und $6^2 . 6 = 6^3$ ist; so folgt, daß

$$46^3 = (40+6)^3 = 40^3 + \underline{2.40^2.6} + \overline{40.6^2} + \underline{40^2.6} + \overline{2.40.6^2} + 6^3$$

seyn muß.

Weil aber auch in diesen einzelnen Produkten das 2te und 4te, wie auch das 3te und 5te zusammen genommen werden können, (n. §. 40.) also daß $2.40^2.6 + 1.40^2.6 = 3.40^2.6$, und $1.40.6^2 + 2.40.6^2 = 3.40.6^2$ ist; so folgt endlich, daß

$$46^3 = (40+6)^3 = 40^3 + \underbrace{3.40^2.6} + \underbrace{3.40.6^2} + 6^3$$

d.h. $46^3 = 97336 = 64000 + 28800 + 4320 + 216$ ist, und so bemerken wir nun bei diesen Reihe in der ersten, daß die Kubikzahl von 46 bestehet: aus der Kubikzahl des ersten Theils 40; dem dreifachen Produkte aus der Quadratzahl des ersten Theils in dem zweiten Theil $3 . 40^2 . 6$; dem dreifachen Produkte des ersten Theils in die Quadratzahl des zweiten Theils $3 . 40 . 6^2$, (n. §. 47.) und endlich der Kubikzahl des zweiten Theils 6^3.

Hin=

Hingegen in der zweiten Reihe beobachten wir, daß die Kubikzahlen in ihren eigenthümlichen Stellen (dem v. §. gemäß) endigen, aber jedes dreifache Produkte, in der nächstfolgenden oder vorhergehenden Stelle, wo die Kubikzahl aufhöret, von deren Wurzel es die Quadratzahl enthält.

Weil aber auch hier die Zahl 46 willkührlich genommen worden ist, und es also jede andere hätte seyn können; so folgt, daß die Kubikzahl jeder zweitheiligen Zahl enthalte:

a. Die Kubikzahl des ersten Theils.

b Das dreifache Produkt der Quadratzahl des ersten Theils in dem zweiten.

c. Das dreifache Produkt des ersten Theils in die Quadratzahl des zweiten; und

d. Die Kubikzahl des zweiten Theils.

Demnach ist auch

$$4{,}6^3=(4+0{,}6)^3=4^3+\underbrace{3.4^2.0{,}6}+\underbrace{3.4.0{,}6^2}+0{,}6^3$$

d.h. $4{,}6^3 = 97{,}336 = 64 + 28{,}8 + 4{,}32 + 0{,}216.$

Ferner $460^3=(400+60)^3= 400^3 + \underbrace{3.400^2.60} + \underbrace{3.400.60^2} + 60^3$

d.h. $460^3=97336000 = 64000000+28800000+4320000+216000$

Oder $0{,}46^3=(0{,}4+0{,}06)^3= 0{,}4^3 + \underbrace{3.0{,}4^2.0{,}06} + \underbrace{3.0{,}4.0{,}06^2}+0{,}06^3$

d.h. $0{,}46^3= 0{,}097336 = 0{,}064 + 0{,}0288 + 0{,}00432 + 0{,}000216$ ꝛc.ꝛc.

Vergleichen wir noch die Stellen miteinander, in welchen die dreifachen Produkte endigen, so sehen wir, wenn wir das erste Beispiel mitnehmen, daß links und rechts in der zweiten Stelle, die von den Quadratzahlen der Einer in die Zehner oder Zehntheile; eben so in der dritten Stelle, die der Quadratzahl

der Zehner oder Zehntheile in die Einer; in der 5ten Stelle die der Quadratzahl der Zehner in die Hunderte, oder der Zehntheile in die Hunderttheile; und in der 6ten Stelle die von den Quadratzahlen der Hunderte in die Zehner, oder der Hunderttheile in die Zehntheile u. s. w.; mit einem Worte, daß jedes dreifache Produkt unmittelbar in der folgenden Stelle der Kubikzahl des höhern Theils, oder in der vorhergehenden Stelle der Kubikzahl des niedrigern Theils endige, sobald es die Quadratzahl des höhern oder niedrigern Theils der Wurzel enthält.

Wollen wir ferner die einzelnen Produkte haben, aus welchen eine Kubikzahl von einer dreitheiligen Zahl wie 463 bestehet; so kön en wir sie anfangs in zwei Theile theilen, und mit denselben nach der bisherigen Regel verfahren; sodann aber noch die einzelnen Produkte der Kubikzahl des aus zweien Theilen bestehenden höhern Theils bestimmen, und sie in die ihnen gehörige Stellen setzen.

Also folgt, da $463 = 460 + 3$ ist, daß $463^3 = (460+3)^3 = 460^3 + 3 . 460^2 . 3 + 3 . 460 . 3^2 + 3^3$ ist, weil aber $460^3 = 400^3 + 3 . 400^2 . 60 + 3 . 400 . 60^2 + 60$, so ist klar, wenn wir die letztern einzelnen Produkte in die Stelle von 460^3 der erstern setzen, wodurch die Summe der Größen nicht im geringsten verändert werden kann,

daß $463^3 = (400+60+3)^3 = 400^3 + 3.400^2.60 + 3.400.60^2 + 60^3 + 3.460^2.3 + 3.460.3^2 + 3^3$

d. h. $463^3 = 99252847 = 64000000 + 28800000 + 4320000 + 216000 + 1904400 + 12420 + 27$ ist.

Und so erkennen wir aus diesen einzelnen Produkten, daß die Kubikzahl einer dreitheiligen Zahl bestehet:

a. Aus der Kubikzahl des ersten Theils,

b Aus

b. dem dreifachen Produkt der Quadratzahl des ersten Theils in dem zweiten,

c. dem dreifachen Produkt des ersten Theils in die Quadratzahl des zweiten,

d. der Kubikzahl des zweiten Theils,

e. dem dreifachen Produkt der Quadratzahl des ersten und zweiten Theils in dem dritten,

f. dem dreifachen Produkt des ersten und zweiten Theils in die Quadratzahl des dritten Theils, und

g. der Kubikzahl des dritten Theils.

Demnach ist auch

$$4630^3 = (4000+600+30)^3 = 4000^3 + \underbrace{3.4000^2+600} + \underbrace{3.4000.600^2} + 600^3$$
$$+ \underbrace{3.4600^2.30} + \underbrace{3.4600.30^2} + 30^3$$

d.h. $4630^3 = 99252847000 = 64000000000 + 28800000000 + 4320000000 + 216000000 + 1904400000 + 12420000 + 27000$

und $46{,}3^3 = (40+6+0{,}3)^3 = 40^3 + \underbrace{3.40^2.6} + \underbrace{3.40.6^2}$
$$+ 6^3 + \underbrace{3.46^2.0{,}3} + \underbrace{3.46.0{,}3^2} + 0{,}3^3$$

d.h. $46{,}3^3 = 99252{,}847 = 64000 + 28800 + 4320 + 216 + 1904{,}4 + 12{,}42 + 0{,}027$ rc.

So wie nun auf eine ähnliche Art alle einzelne Produkte einer Kubikzahl von einer noch mehrtheiligen Zahl bestimmt werden, so erhalten wir auch für einen jeden hinzugesetzten Theil (wie im vorigen Beispiel) noch drei einzelne Produkte, wornach erhellet, daß wir von jeder beliebigen Zahl, genau soviele einzelne Kubikzahlen, und zweimal soviele dreifache Produkte weniger zwei erhalten, als bedeutende Ziffern in der gegebenen Zahl angetroffen werden, welche letztere sämtlich in denen Stellen endigen, die zwischen der vorigen ihren befindlich sind; sie enthalten nach und nach die Quadratzahl vom 1ten Theil,

die vom ersten und zweiten Theil, die vom 1ten, 2ten und 3ten u. s. w. in dem 2ten, 3ten, 4ten Theil nach gleicher Ordnung genommen, und dann die Quadratzahl des 2ten, 3ten, 4ten 2c. Theils, bis zu dem gegebenen niedrigsten Theile, jede mit der Summe aller vorhergehenden Theile multiplizirt, weshalb wir ganz allgemein festsetzen können:

Um die Kubikzahl einer jeden beliebigen Zahl zu finden, mache man:

a. Die Kubikzahl des ersten Theils,

b. Das dreifache Produkt aus der Quadratzahl des ersten Theils in dem zweiten,

c. Das dreifache Produkt des ersten Theils in die Quadratzahl des zweiten,

d. Die Kubikzahl des zweiten Theils;

e. Das dreifache Produkt aus der Quadratzahl des ersten und zweiten Theils in dem dritten; und so fahre man fort, bis man zum vorletzten Produkt das dreifache Produkt aus dem ersten, und zweiten 2c. und vorletzten Theile in die Quadratzahl des letzten Theils, und endlich die Kubikzahl des letzten Theils erhält.

Verlangte man demnach die Kubikzahl von 3157, so würden wir setzen:

$$3157^3 = (3000 + 100 + 50 + 7)^3 = 3000^3 + 3.\underbrace{3000^2\ 100} +$$
$$\underbrace{3.3000.100^2} + 100^3 + \underbrace{3.3100^2.50} + \underbrace{3\ 3100.50^2} +$$
$$50^3 + \underbrace{3.3150^2.7} + \underbrace{3.3150.7^2} + 7^3.$$

d. h. $3157^3 = 31464718093 = 27000000000 + 2700000000 + 90000000 + 1000000 + 1441300000 + 23250000 + 125000 + 208372500 + 463050 + 343.$ u. s. w.

Da es mit den Kubikzahlen der Brüche, deren Glieder mehr als eine bedeutende Ziffer haben, gleiche Bewandniß hat, so folgt, daß

$$\left(\frac{85}{476}\right)^3 = \frac{85^3}{476^3}$$

$$= \frac{80^3 + 3.\ 80^2.5 + 3.\ 80.\ 5^2 + 5^3}{400^3 + 3.400^2.70 + 3.400.70^2 + 70^3 + 3.470^2.6 + 3.470.6^2 + 6^3}$$

$$= \frac{614125}{107850176} \text{ u. s. w.}$$

Uebrigens kann alles, was in der Anmerkung des 91 § über die Regel der Quadratzahlen gesagt worden ist, auf gegenwärtiges bezogen werden; wir unterlassen hier solches aber, um eine weitläuftige Wiederholung zu vermeiden.

§. 103.

War es vortheilhaft, eine Tabelle der Quadratzahlen von 1 bis 1000 zu haben, so muß uns eine ähnliche von den Kubikzahlen es noch weit mehr seyn, weil die Bestimmung derselben mehrere Arbeit erfordert.

Um also dergleichen Tabelle auf eine leichte Art zu erhalten, wollen wir untersuchen, ob nicht ebenfalls aus den Differenzen der Kubikzahlen von den Zahlen, die um 1 vermehrt worden, eine Reihe Zahlen entspringt, nach der ihre Kubikzahlen bequem gefunden werden können.

Setzen wir demnach die Zahlen nach natürlicher Ordnung als erste Reihe, deren Kubikzahle als zweite, deren Differenzen als dritte, und von diesen die Differenzen als vierte Reihe; so erhalten wir:

von

von den Zahlen		die Kubikzahlen		die Differenzen		die 2te Differenzen
1	=	1	=	1	=	0
2	=	8	=	7	=	6
3	=	27	=	19	=	12
4	=	64	=	37	=	18
5	=	125	=	61	=	24
6	=	216	=	91	=	30
7	=	343	=	127	=	36
8	=	512	=	169	=	42
9	=	729	=	217	=	48
10	=	1000	=	271	=	54
11	=	1331	=	331	=	60
12 ꝛc.	=	1728 ꝛc.	=	397 ꝛc.	=	66 ꝛc. ꝛc.

Und so sehen wir, daß die Zahlen der vierten Reihe um die Differenz 6 zunehmen; nach welcher also dieselbe fortgesetzt, und von ihnen die dritte Zahlenreihe bestimmt werden kann, wenn eine jede zu der eine Stelle höher stehenden Zahl der dritten Reihe addiret wird: denn so ist klar, daß die Zahl 6 von der zweiten Stelle, zu 1 von ersten Stelle der dritten Reihe addiret, die Zahl 7 ihrer zweiten Stelle hervorbringt; und eben so ist 12 + 7 = 19; 19 + 18 = 37 ꝛc.

Und völlig gleiche Bewandniß hat es auch mit Bestimmung der Kubikzahlen von der zweiten Reihe, aus den Zahlen der dritten Reihe: denn so ist 1 + 7 = 8; 8 + 19 = 27; 27 + 37 = 64 ꝛc. ꝛc. Demnach können wir auf diese Art nach Vorherbestimmung der Zahlen in der dritten Reihe sämmtliche Kubikzahlen von 1 bis 1000 finden, und in die zweite angehängte Tabelle bringen, die eine ähnliche Einrichtung mit der Tabelle der Quadratzahlen erhalten hat, und daher keiner nähern Erklärung bedarf.

§. 104.

Da uns nun die Kubikzahlen in der Tabelle von 1 bis 1000 bekannt sind, so können wir nach derselben die

Kubik=

Kubikzahlen aller gegebenen Zahlen bequem finden, wenn wir auf die zuletzt erhaltene Regel (§. 102.) Rücksicht nehmen.

Sollte also der Ausdruck 45^3 gegeben werden, so würden wir von der ersten Seite in der 45ten Zeile der zweiten Zahlenreihe, die Zahl 91125 dafür nehmen.

Wäre 736^3 gegeben, so nehmen wir auf der zweiten Seite in der 9ten Zahlenreihe die 36te Zeile, wo wir 398688256 finden.

Sollte 364^3 gegeben seyn, so nehmen wir auf vorige Art von der dritten Seite die Zahl 48228544 u. s. w.

Müßte hingegen 423765^3 bestimmt werden; so können wir sie in die beiden Theile 423000 + 765 theilen, und (n. §. 102) setzen:

$$423765^3 = (423000 + 765)^3 = 423000^3 + 3.423000^2 765 + 3.423000.765^2 + 765^3.$$

Da nun nach der Tabelle der Quadratzahlen $423^2 = 178929$, so ist $423000^2 = 178929000000$; und $765^2 = 585225$; folglich giebt

$$
\begin{array}{rl}
178929000000 & = 423000^2, \\
\text{mit } 765 & \text{multiplizirt} \\
\hline
894645 & \\
1073574 & \\
1252503 & \\
\hline
136880685000000 & = 423000^2.765 \\
3) \quad \overline{410642055000000} & = 3.423000^2.765
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{und } 585225 & = 765^2 \\
423000 & \\
\hline
1755675 & \\
1170450 & \\
2340900 & \\
\hline
247550175000 & = 423000.765^2 \\
3) \quad \overline{742650525000} & = 3.423000.765^2
\end{array}
$$

Und

Und weil nach der Tabelle der Kubikzahlen $423^3 = 75686967$;

so ist $42300^3 = 75686967000000000$;

und $765^3 = 447697125$.

Setzen wir also die bestimmten einzelnen Werthe unter einander, und machen ihre Summe,

$$
\begin{array}{lr}
\text{also } 423000^3 & = 75686967000000000 \\
3.423000^2.765 = & 410642055 \\
3.423000\ .765^2 = & 742650525 \\
765^3 = & \underline{447697125} \\
\text{so folgt, daß } 423765^3 & = 76098352153222125 \text{ ist.}
\end{array}
$$

Und da wir auf ähnliche Art bei andern gegebenen Zahlen verfahren, und, wenn sie zehntheilige Stellen enthalten, blos auf ihre in den Produkten entstehenden Stellen achten müssen, so brauchen nicht mehrere Beispiele angeführt zu werden.

Um aber auch einen Gebrauch dieser Zahlen zu zeigen, gedenken wir uns einen Haufen Mauersteine, welche so neben- und übereinander gelegt sind, daß man nach seiner Länge, Breite und Höhe eine gleiche Anzahl zählen kann.

Würde also gefragt: Wieviel Steine sind erforderlich einen dergleichen Haufen zu setzen, wenn sowohl nach seiner Länge, als nach der Breite und Höhe 12 Steine zu zählen sind? so muß die Antwort seyn: er erfordere $12^3 = 12.12.12 = 1728$ Mauersteine.

Und fände man bei dergleichen Haufen, daß die eine Reihe 20 Steine hätte, so müßte er 8000 Steine enthalten, u. s. w.

Uebrigens müssen wir hier noch bemerken, daß auch die vorigen Quadratzahlen und Kubikzahlen, wie überhaupt alle Produkte von gleichen Faktoren nach dieser ihrer Menge Potenzen genannt und mit Exponenten bezeichnet werden; also daß wir z. B. unter $8^1 = 8$ die erste Potenz, unter $8^2 = 8.8$ die zweite Potenz, unter $8^3 = 8.8.8$

die

die dritte Potenz, unter $8^4 = 8.8.8.8$ die vierte Potenz, unter $8^5 = 8.8.8.8.8$ die fünfte Potenz der Zahl 8 u. s. w. verstehen. Und ob wir uns gleich in die Entwickelung der Eigenschaften dieser höhern Potenzen nicht einlassen, so müssen wir doch den Begriff, den man mit diesen Größen verbindet, wohl behalten, weil wir uns in der Folge (§. 148.) auf sie beziehen werden.

Auch findet in Absicht der Wurzeln dieser Größen eine ähnliche Bestimmung statt; nemlich, man nennet sie die zweite, dritte, vierte Wurzel, wenn sie zur 2ten, 3ten, 4ten ꝛc. Potenz erhoben, die vorgegebene Größe hervorbringt. So wäre $2 = \sqrt[2]{4}$ die 2te Wurzel von 4, 2 die 3te Wurzel von 8, 2 die 4te Wurzel von 16, weil $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ ist u. s. w.

Von den Kubikwurzeln.

§. 105.

Da die zweite Bestimmung war: aus einer Zahl die Kubikwurzel, oder solche Zahl zu finden, welche mit ihrer Quadratzahl multiplizirt, die gegebene hervorbringt, (§. 100.) so wollen wir, dieselbe anzuzeigen, den Zahlen dieses Zeichen $\sqrt[3]{}$ vorsetzen, weil sie dadurch von den Quadratwurzeln hinreichend unterschieden werden.

Demnach ist $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{0{,}000343} = 0{,}07$;

$$\sqrt[3]{\left(\frac{8}{64}\right)} - \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ u. s. w.}$$

§. 106.

Um auch hier mit der Bestimmung der Quadratwurzeln (§. 95.) gleiche Ordnung zu beobachten, so nehmen wir die gegebenen Zahlen unter die beiden Fälle; als

a. Kön-

a. Können sie höchstens drei, und
b mehrere bedeutende Ziffern haben.

Würde demnach, dem ersten Falle gemäß, die Kubikwurzel einer Zahl, die höchstens drei bedeutende Ziffern hat, verlangt; so nehme man die Wurzel der bedeutenden Ziffern, als eine Zahl der Einer betrachtet, und ertheile derselben dreimal weniger Nullen, oder zehntheilige Stellen, als die gegebene Zahl hat.

Sollte also die Kubikwurzel von 729 bestimmt werden, so setzen wir: $\sqrt[3]{729}=9$, weil $9.9.9=9^2.9=729$ ist, u. s. w.

Wäre hingegen der Ausdruck $\sqrt[3]{125000}$ aufzulösen, so sagen wir: da $\sqrt[3]{125}=5$, so muß $\sqrt[3]{125000}=50$ seyn.

Eben so ist $\sqrt[3]{343000000000}=7000$ u. s. w.

Ferner $\sqrt[3]{0{,}064}=0{,}4$; $\sqrt[3]{0{,}000216}=0{,}06$

Endlich $\sqrt[3]{\left(\frac{64000}{125000000}\right)}=\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125000}}=\frac{4}{50}=\frac{2}{25}=0{,}08$ u. s. w.

Erinnern wir uns, das jede Kubikzahl dreimal soviel Nullen oder zehntheilige Stellen haben mußte, als die gegebenen Zahlen hatten, (§. 101.) so wird uns auch hier die gegebene Regel einleuchtend seyn.

§. 107.

Haben aber nach dem zweiten Falle, die gegebenen Zahlen mehr als drei bedeutende Ziffern, deren Kubikwurzeln bestimmt werden sollen; so müssen wir von ihnen offenbar eben so viele einzelne Wurzeln bekommen, als sie einzelne Kubikzahlen enthalten (§. 102.)

(§. 102.) deren Menge zu erfahren, wir dieselben (wie bei den Quadratzahlen §. 96.) in Klassen zu 3 und 3 Ziffern, von der Stelle der Einer anfangend, eintheilen, indem wir von diesen nur so viele erhalten können, als Ziffern in die zu bestimmende Kubikwurzel kommen, weil dieser ihre Kubikzahlen in der 1ten, 4ten, 7ten u. s. w. Stelle vor den Strichen endigen müssen.

Nach solcher geschehenen Eintheilung der Zahl, suchen wir alsdenn wirklich die Kubikwurzel der ersten Klasse, welche den ersten Theil der ganzen Wurzel giebt, machen deren Kubikzahl, setzen sie ihrem Werthe gemäß unter, und ziehen sie ab; sodann rückt man zum Reste die nächstfolgende Ziffer hinter dem Striche herunter, welche, mit dem Reste zusammengenommen, das dreifache Produkt aus der Quadratzahl des ersten Theils der Wurzel in ihrem noch unbekannten zweiten Theile enthält (§. 102.) Um also diesen zweiten Theil zu finden, erinnern wir uns, wie wir aus einem gegebenen dreifachen Produkte und dessen einen Faktor, den andern unbekannten Faktor bestimmen können (§. 57.), und nehmen die Quadratzahl des ersten Theils der Wurzel dreimal für den bekannten Faktor, dividiren mit demselben in die vorhandene Zahl, und finden so im Quozienten den unbekannten Faktor, oder den zweiten Theil der Wurzel, mit dem wir den Divisor multiplizについては, und das entstehende Produkt von der getheilten Zahl abziehen. Rücken wir ferner zum entstandenen Reste die nächste Ziffer, so muß die hiedurch bestimmte Zahl das dreifache Produkt aus dem 1sten Theil der Wurzel in die Quadratzahl des 2ten Theils enthalten (§. 102.) Da nun beide Theile bekannt sind, so machen wir vom 2ten die Quadratzahl, multipliziren dieselbe mit dem ersten, und nehmen das entstehende Produkt dreimal, setzen die entstehende Zahl unter die vorhandene, und ziehen sie ab. Endlich rücken wir zum Rest die dritte Ziffer, die vor dem nächsten Strich stehet, wodurch wir also die Zahl bekommen, so

die Kubikzahl des 2ten Theils enthält, mithin formiren wir diese Kubikzahl, und ziehen sie ab. Hängen wir hierauf dem Reste die nächste Ziffer an, so entstehet die Zahl, welche das dreifache Produkt aus der Quadratzahl des ersten und zweiten Theils der Wurzel in ihrem dritten Theil enthält, welchen letztern zu bestimmen genau so, wie beim zweiten verfahren wird, weil wir den ersten und zweiten Theil der Wurzel als einen einigen Theil oder Faktor betrachten können. Fähret man also auf angezeigte Art bei Bestimmung der übrigen Theile der Wurzel fort, wo wir nach und nach 3, 4 ꝛc. Theile, als einen Theil nehmen, so ergiebt sich leicht die Kubikwurzel jeder Zahl, welches folgende Beispiele erläutern:

Wäre demnach der Ausdruck $\sqrt[3]{185193}$ aufzulösen, so setzten wir:

$$\begin{array}{rr|l}
 & 185 & 193 \mid 50+7=57 \\
50^3=125000 & 125 & \\
\hline
50^2\cdot3=7500) & 601 & \\
50^2\cdot3\cdot7= & 525 & \\
\hline
 & 769 & \\
50\cdot7^2\cdot3= & 735 & \\
\hline
 & 343 & \\
7^3= & 343 & \\
\hline
\end{array}$$

und sagten: von 185, als der Zahl der höchsten Klasse kann nicht 6 die Kubikwurzel seyn, weil $6^3 = 216$ ist, mithin müssen wir 5 nehmen, weil $5^3 = 125$ von 185 abgezogen werden kann; da nun 185 in der vierten Stelle endiget, so muß auch 125 dahin gebracht werden, und mithin darf nicht 5, sondern 50 der erste Theil der Wurzel seyn. Ziehen wir nun 125 von 185 ab, so bleibt uns 60, oder eigentlich 60000 zum Rest; setzen wir die nächste Ziffer 1 herunter, so erhalten wir die Zahl 60100, welche Hunderte eigentlich das dreifache Produkt aus der Quadratzahl des ersten Theils 50 in dem zweiten unbe-

kannten Theil enthalten. Da nun $50^2 . 3 = 7500$ in 60100, wie 75 in 601, offenbar 7mal enthalten sind, so multipliziren wir den Divisor 7500 mit dem Quozienten 7, und erhalten $50^2 . 3 . 7 = 750 . 7 = 52500$, welches von 60100 abgezogen, eigentlich 7600 oder 76 Hunderte zum Rest läßt. Rücken wir zu demselben die Ziffer 9, so erhalten wir 769 Zehner, die das dreifache Produkt aus dem ersten Theile der Wurzel in der Quadratzahl ihres 2ten Theils enthält; also setzen wir $50 . 7^2 . 3 = 7350$ oder 735 Zehner unter die 769 Zehner, machen den Abzug, und finden 34 Zehner zum Rest; zu welchen die nächste Ziffer 3 genommen, die Zahl 343 giebt, welche die Kubikzahl des 2ten Theils genau enthält, weil $7^3 = 343$ ist; und so ist klar, daß wir durch ihren Abzug keinen weitern Rest erhalten, und 57 die verlangte Kubikwurzel ist, sobald wir ihre Theile zusammen nehmen.

Auch hier gilt die Anmerkung, welche in Ansehung der Wurzel (§. 96.), und den zur Seiten angezeigten einzelnen Produkten gemacht worden, daher denn obige Rechnung auf folgende Art angestellt werden kann; nemlich wir setzen:

```
      185|193|57
      125|
  75) 601
      525
       769
       735
        343
        343
```

und sprechen: da $5^3 = 125$, so ist $185 - 125 = 60$, zu welchem die 1 gerückt 601 bestimmt. Ferner ist $5^2 . 3 = 75$, und $601 : 75 = 7$, mithin $75 . 7 = 525$, und $601 - 525 = 76$, zu der die nächste Ziffer 9 gerückt, 769 bestimmt; weiter ist $5 . 7^2 . 3 = 735$, mithin $769 - 735 = 34$, zu der noch die letzte Ziffer 3 genommen

343 giebt. Endlich da $7^3 = 343$, so folgt, weil 343 − 343 = 0, daß $57 = \sqrt[3]{185193}$ sey.

Wäre ferner der Ausdruck $\sqrt[3]{0{,}311665752}$ aufzulösen; so setzen wir:

```
        0,3 1 1|6 6 5|7 5 2|0,678
          2 1 6|
   108) 9 5 6
        7 5 6
        2 0 0 6
          8 8 2
        1 1 2 4 5
            3 4 3
 13465) 1 0 9 0 2 7
        1 0 7 7 3 6
            1 2 9 1 5
            1 2 8 6 4
                  5 1 2
                  5 1 2
```

Oder wäre $\sqrt[3]{444194{,}947}$ gegeben; so setzen wir:

```
        4 4 4|1 9 4,|9 4 7|76,3
        3 4 3|
        1 0 1 1
          8 8 2
          1 2 9 9
            7 5 6
          5 4 3 4,
            2 1 6,
  5776) 5 2 1 8,9
        5 1 9 8,4
            2 0,5 4
            2 0,5 2
                  2 7
                  2 7
```

Eben

Eben so ist auch $\sqrt[3]{0,031554496} = 0,316$; $\sqrt[3]{10793861000} = 2210$ u. s. w.

Und da bei den Wurzeln der Brüche kein anderer Unterschied anzutreffen ist, als daß man dieselben aus jedem Gliede ausziehet; so folgt, daß

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1331}{1728}\right)} = \frac{11}{12};\ \frac{\sqrt[3]{4913}}{\sqrt[3]{2248091}} = \frac{17}{131} \text{ u. s. w.}$$

und $\sqrt[3]{\left(\frac{512}{8000}\right)} = \sqrt[3]{0,64} = 0,4$ ist, u. s. w.

Uebrigens finden hier ebenfalls die oben zu Ende des 96. §. gegebenen Erinnerungen bei Bestimmung der Theile einer Kubikwurzel statt, nur daß man hier stets, wenn eine 0 in der Wurzel hat gesetzt werden müssen, die drei nächsten Ziffern zur getheilten Zahl heruntersetzet, dem Divisor hingegen zwei Nullen anfüget, und dann in der Rechnung gewöhnlicherweise fortfährt, welches folgendes Beispiel hinreichend deutlich machet.

Wäre der Ausdruck $\sqrt[3]{9098960759160832}$ gegeben, so setzen wir:

```
                                                  8
 9|0 9 8|9 6 0|7 5 9|1 6 0|8 3 2|209768
 8|
      12)1 0 9 8 9
    1200)1 0 8 0 0
             1 8 9 6
             4 8 6 0
    1200)1 0 9 8 9
           9 6 0 0
           1 3 8 9 6
             3 8 4 0
           1 0 0 5 6 0
               5 1 2
  129792)1 0 0 0 4 8 7
           9 0 8 5 4 4
             9 1 9 4 3 5
               3 0 5 7 6
             8 8 8 8 5 9 9
                     3 4 3
13066707)8 8 8 8 2 5 6 1
         7 8 4 0 0 2 4 2
         1 0 4 8 2 3 1 9 6
                 2 2 5 3 9 6
         1 0 4 5 9 7 8 0 0 0
                       2 1 6
1307422128)1 0 4 5 9 7 7 7 8 4 8
           1 0 4 5 9 3 7 7 0 2 4
                       4 0 0 8 2 4 3
                       4 0 0 8 1 9 2
                               5 1 2
                               5 1 2
```

und sprechen: von 9 ist 2 die Kubikwurzel; da nun $2^3 = 8$, so ist $9 - 8 = 1$, zu welchem Rest die nächste

ste Ziffer 0 herunter gerückt, die Zahl 10 giebt; ferner ist $2^3 . 3 = 12$, und $10 : 12 = 0$; wir müssen also zur Zahl 10 die drei nächsten Ziffern herunter rücken, und erhalten dadurch 10989. Nun vermehren wir den Divisor um zwei Nullen, welches das Produkt $20^2 . 3$ bestimmt, und sagen: 10989 : 1200 oder $10 : 1 = 9$; $9 . 1200 = 10800$ von 10989 weggenommen, läßt 189 zum Rest; dem die folgende Ziffer 6 beigesetzt, die Zahl 1896 bestimmt, welche offenbar kleiner als das von ihr noch abzuziehende dreifache Produkt $20 . 9^2 . 3 = 4860$ ist. Demnach ist der zuletztgenommene Theil der Wurzel, nemlich 9 zu groß, mithin streichen wir denselben durch, und nehmen an seiner Stelle die 8, ziehen einen Strich unter 4860, und setzen unter ihm die vorhergetheilte Zahl 10989, aber vor ihr den Divisor 1200, und sprechen: $8 . 1200 = 9600$, $10989 - 9600 = 1389$, zu der die Ziffer 6 wiederum genommen 13896 giebt; ferner $20 . 8^2 . 3 = 3840$, und es ist $13896 - 3840 = 10056$, zu welcher Zahl die nächste Ziffer 0 gerückt 100560 bestimmt; wiederum ist $8^3 = 512$, und $100560 - 512 = 100048$. Fahren wir endlich auf ähnliche Art in dieser Rechnung fort, so erhalten wir 208768 zur verlangten Kubikwurzel.

§. 108.

Da auch hier außer den bisherigen Kubikzahlen, öfters andere Zahlen gegeben werden, deren Kubikwurzel man bestimmen soll, so können wir bei denselben, wie oben (§. 97.) darthun, daß die verlangte Größen unaussprechlich und also Irrazionalzahlen sind. Denn nehmen wir zum Exempel, daß der Ausdruck $\sqrt[3]{16}$ aufgelöset werden sollte, so würden wir sagen: da von der Zahl 16, die zwischen 8 und 27 fällt, weder die Zahl 2 noch 3 die Wurzel seyn kann, weil erstere zu klein, und letztere zu groß ist; so muß sie nothwendig kleiner als 3 und größer als 2, also höchstens ein unächter Bruch

 seyn.

seyn. Da aber ein Bruch, zur Kubikzahl erhoben, sowohl im Zähler als Nenner 3 Faktores enthält, die einfache Zahlen verschiedener Art sind, so folgt (n. §. 78.) daß die vom Zähler, des Nenners seine nicht genau enthalten, und also der entstehende neue Bruch selbst nicht einfacher vorgestellt werden, d. h. die Zahl 16 nicht geben kann.

§. 109.

Ohngeachtet nun der Werth einer Irrazionalzahl ganz genau zu bestimmen unmöglich ist, so können wir uns demselben doch so sehr nähern, daß der obwaltende Fehler nicht geachtet werden kann, welche Rechnung, die **Kubikwurzel durch die Rechnung zu finden**, genannt wird.

Würde also die Kubikwurzel der Zahl 16 bis auf 0,001 verlangt, so setzen wir:

```
          1 6,|0 0 0|0 0 0|0 0 0|2,519
            8,
      12) 8 0
          6 0
          2 0 0
          1 5 0
            5 0 0
            1 2 5
   1875)    3 7 5 0
            1 8 7 5
            1 8 7 5 0
                  7 5
            1 8 6 7 5 0
                      1
 189003)    1 8 6 7 4 9 0
            1 7 0 1 0 2 7
              1 6 6 4 6 3 0
                6 6 9 1 9 3
              1 6 0 3 6 3 7 0
                        7 2 9
```

und

und so erhellet, daß $\sqrt[3]{16} = 2{,}519$ ist.

Auf eben die Art folgt, daß $\sqrt[3]{63674} = 39{,}935$ u. s. w.

Und hätten wir aus Brüchen die Wurzel zu ziehen, deren Glieder Irrazionalzahlen sind, so würden wir erst dieselbe in eine zehntheilige Zahl verwandeln, und nachher aus dieser die Wurzel bestimmen.

So würde $\sqrt[3]{\left(\frac{17779581}{134217728}\right)} = \sqrt[3]{0{,}132468201}$ $= 0{,}509$ seyn, u. s. w.

§. 110.

Endlich können wir uns eben der Vortheile bei Bestimmung der Kubikwurzel bedienen, die wir bei der Quadratwurzel (§. 99.) gezeigt haben; nemlich, daß man

a. die einzelnen Produkte, wie in der Division (§. 61. b.) sogleich abziehet;

Wäre demnach der Ausdruck $\sqrt[3]{0.031554496}$ gegeben, so setzen wir:

```
0,0 3 1|5 5 4|4 9 6|0,316
27)  4 5
       1 8 5
       1 7 6 4
2883)  1 7 6 3 4
           3 3 6 9
             2 1 6
```

b. Und besitzen wir eine Tabelle der Kubikzahlen; so bestimmen wir, indem wir die drei ersten Klassen als eine Zahl der Einer betrachten, den ersten Theil der Wurzel, den wir als Hunderte nehmen, suchen nachhero in der Reihe dieser Hun-

 derte,

derte, in der Tabelle diejenige Zahl, welche der Zahl von den 3 Klassen am nächsten kömmt, deren beide folgende Wurzeltheile, die auf derselben Zeile in der ersten Reihe befindliche Zahl giebt, ziehen sie ab, und verfahren mit den übrigen Klassen, wie bisher geschehen.

Wäre also der Ausdruck $\sqrt[3]{6891541327}$ gegeben, so setzen wir:

```
              6|8 9 1|5 4 1|3 2 7|1903
              6|8 5 9|0 0 0|
190².3=108300) 3 2 5 4 1 3
               3 2 4 9 0 0
                   5 1 3 2
                   5 1 3 0
                       2 7
                       2 7
```

```
        oder auch 6|8 9 1|5 4 1|3 2 7|1903
190².3=108300)      3 2|5 4 1|3
                        5 1 3 2
                            2 7
```

und sagen: von 6 ist 1 die Wurzel, suchen unter 100 in der Tabelle, die Zahl 6891541, der 6859000 am nächsten kömmt, und die Kubikzahl von 190 ist, wie wir an 90 der ersten Reihe sehen: ziehen diese Zahl also ab, rücken die nächste Ziffer zum Rest, und erhalten 325413, in welcher wir mit $190^2.3=108300$ theilen, u. s. w.

Und denken wir hier wieder an die Haufen von Mauersteinen, welche nach der Höhe, Breite und Länge eine gleiche Anzahl wahrnehmen lassen, so kann man folgende bei ihnen gethane Frage: Wieviel Steine müssen von 314432 neben- und übereinander gelegt werden, um einen Haufen zu erhalten, von dem jede Reihe gleich-

viel

viel enthält? vermittelst der Kubikwurzel dieser Zahl beantworten. Nemlich: jede Reihe enthalte $\sqrt[3]{314432} = 68$ Steine.

Und enthielte ein Haufe 16387064 Steine; so hätte jede Reihe $\sqrt[3]{16387064} = 254$ Steine.

Würden aber 4977 Steine gegeben, von welchen ein Haufe aufgesetzet werden sollte; so würde $\sqrt[3]{4977} = 17$ seyn, und noch der Rest 64 übrig bleiben; weil aber auch $\sqrt[3]{64} = 4$, so sehen wir, daß von 4977 kein völliger Haufe, sondern einer von 17 Steinen, und ein anderer von 4 Steinen in jeder Reihe geleget werden kann.

Da wir nun sowohl alle beliebige Quadrat- und Kubikzahlen, als deren Quadrat- und Kubikwurzeln finden können, welche Größen mehrentheils in geometrischen Bestimmungen angewandt werden; so können wir jetzt zu den Vergleichungen der Zahlen übergehen, aus welchen eigentlich die Anwendung und der Nutzen aller vorigen Rechnungsarten erhellet.

Fünfte Abtheilung.

Von den arithmetischen und geometrischen Verhältnissen, wie auch von deren Proporzionen oder Verhältnißgleichungen.

§. 111.

Wollen wir zwei Größen mit einander vergleichen, oder wissen, welchen Bezug dieselben gegen einander haben, so müssen wir untersuchen, entweder: um wie viel oder um wie vielmal die eine größer oder kleiner als die andere sey? Es findet demnach die eine oder die andere Bestimmung bei denselben statt, von welchen erstere das arithmetische Verhältniß, und die andere das geometrische genannt wird.

Würden also die beiden Größen 6 und 2 gegeben, und wir wollten wissen, um wieviel 6 größer als 2 sey? d. h. was für eine Größe von 6 hinweggenommen werden müßte, damit diese der 2 gleich werde? so müßten wir sagen: es sey die Größe 4. Wollten wir aber wissen: um wie vielmal die Größe 6 größer als 2 sey? d. h. um wie vielmal die 6 kleiner gemacht werden müsse, damit dieselbe der 2 gleich werde? so würden wir sagen: um 3 mal, d.i. $\frac{6}{2}$ mal, welche leztere Bestimmung, wie wir sehen, bei ebendenselben Größen von der erstern ihre ganz verschieden ist.

Uebrigens ist einleuchtend, daß zu dem Verhältniß blos Größen einer Art, oder die zu einem Gesetz gehören, genommen werden können: denn was sollte man antworten, wenn gefragt würde: um wieviel, oder wie vielmal sind 6 ℔ größer als 2 Rthl., oder 2 Ellen?

Ellen? u. s. w. Ferner ist klar, daß das Wort Verhältniß, wie bei mehrern Ausdrücken, ganz willkührlich sey angenommen worden, da es nicht im geringsten einen hellern Begrif von der Sache zu geben vermag.

Von den arithmetischen Verhältnissen und Proporzionen.

§. 112.

Um beiderlei Verhältnisse, und die aus ihnen entstehende Proporzionen nach ihren Eigenschaften kennen zu lernen, wollen wir erst die arithmetischen betrachten, und nachher in gleicher Absicht die geometrischen folgen lassen.

Denken wir nun nach: was eigentlich ein arithmetisches Verhältniß bestimme? so wird uns alsobald klar werden, daß es die Differenz seiner Größen sey, die entweder der einen hinzugethan oder von ihr weggenommen werden muß, damit sie der andern gleich werde.

Es sind also bei jedem arithmetischen Verhältnisse drei Größen zu bemerken, nemlich die beiden Gegebenen, welche dessen Glieder heißen mögen, und die aus denselben entspringende Differenz. *)

Würden demnach zu dieser Bestimmung obige Größen 6 und 2 gegeben, so heißen dieselben: Glieder des Verhältnisses, deren Differenz 4 ist, welche vom ersten 6 weggenommen das andere 2 giebt. Und würden eben diese Größen umgekehrt, also 2 und 6 gegeben, so wäre zwar 4 ebenfalls der Glieder Differenz, müßte aber dem ersten 2 zugesezt werden, das zweite 6 zu erhalten.

So werden wir nun gewahr, daß in diesen beiden Verhältnissen, ihrer gleichen Differenz ohngeachtet, die zweiten Glieder aus den ersten keine gleiche,

*) Diese wird von einigen der Name des Verhältnisses genannt.

che, sondern verschiedene Entstehung haben, weswegen wir dieselben für verschiedene Verhältnisse annehmen.

Hätten die zweiten Glieder hingegen bei gleicher Differenz auch gleiche Entstehung, so würden wir sie für gleiche Verhältnisse anerkennen, wie zum Beweis die Größen 3 und 5, 4 und 6, u. s. w. oder 10 und 5, 9 und 4 u. s. w.

Nehmen wir aber Verhältnisse an, von welchen die Glieder einander gleich, und mithin ihre Differenzen 0 sind; so nennt man diese zum Unterschiede der andern, **Verhältnisse der Gleichheit**, dergleichen die Größen 4 und 4, 3 und 3, 9 und 9, u. s. w. geben würden.

Damit wir aber künftig bei diesen Größen erkennen können, daß durch sie Verhältnisse bestimmt werden sollen; so wollen wir zwischen ihnen das Subtrakzionszeichen stellen. Demnach würden 2 — 6, 3 — 5, 6 — 2, 5 — 3 rc. rc. verschiedene Verhältnisse, 3 — 5, 4 — 6 u. s. w. und 10 — 5, 9 — 4 rc. rc. gleiche Verhältnisse, und 4 — 4, 3 — 3, 9 — 9, rc. rc. Verhältnisse der Gleichheit vorstellen.

Hier will also das Zeichen nicht, wie im 22ten §., anzeigen, daß die zweite Größe von der ersten abgezogen werden soll, sondern daß diese arithmetische Verhältnisse von den geometrischen, die wir weiter hin kennen lernen werden, zu unterscheiden sind.

§. 113.

Da nun, dem vorigen §. gemäß, in gleichen Verhältnissen die 2ten Glieder um eine gleiche Differenz größer oder kleiner als die ersten sind; so ist einleuchtend, daß es deren unzählige geben müsse, weil es eben so viele Zahlen giebt, zu denen man gleiche Größen hinzusetzen oder wegnehmen kann.

So

So sind es also 1 — 2, 2 — 3, 3 — 4, 4 — 5 u. s. w. deren Differenz 1; und auch 12 — 9, 11 — 8, 10 — 7, 9 — 6, u. s. w. deren Differenz 3 ist, in welchen bei den erstern die zweiten Glieder größer, und bei den letztern diese kleiner als die ersten Glieder sind.

Vergleichen wir nun in beiden Reihen die Glieder der zweiten, der dritten rc. rc. Verhältnisse mit den Gliedern der ersten; so finden wir bei erstern, daß dieselben genau um 1, 2, 3 rc. größer, und bei den andern, daß sie um 1, 2, 3 rc. kleiner sind, woraus erhellet:

a. **Daß ein arithmetisches Verhältniß nicht verändert werde, wenn man seinen Gliedern gleiche Größen zusetzt oder wegnimmt.**

Demnach ist 16 — 23 = (16 + 3) — (23 + 3) = 19 — 26; oder 16 — 23 = (16 — 5) — (23 — 5) = 11 — 18 u. s. w.

Vergleichen wir hingegen die Glieder der Verhältnisse 1 — 2, 2 — 3, 3 — 4 rc. mit den Gliedern der Verhältnisse 2 — 4, 4 — 6, 6 — 8 u. s. w. von welchen erstere die Differenz 1, und letztere 2 haben; so finden wir, daß letztere genau zweimal so groß als erstere, und eben so auch deren Differenzen sind; daher denn auch folgt:

b. **Daß die Glieder eines arithmetischen Verhältnisses, mit gleicher Zahl multiplizirt, ein Verhältniß geben, dessen Differenz genau sovielmal größer, als die Differenz des gegebenen ist, und als die multiplizirende Zahl Einheiten enthält; und zugleich umgekehrt, wenn man dividirt, daß die Differenz um sovielmal kleiner sey.**

Wäre demnach 5 — 9 gegeben, deren Differenz 4 ist, und wir multiplizirten mit 6, so muß 24 die Differenz des entstehenden Verhältnisses seyn; und wirklich giebt auch 5 . 6 — 9 . 6 = 30 — 54 nicht weniger als 24.

Und hätten wir 39 — 69 erhalten, deren Differenz 30 ist, und theilten mit 3; so muß die Differenz

$\frac{30}{3} = 10$ seyn. So giebt es auch wirklich $\frac{39}{3} - \frac{69}{3}$ $= 13 - 23$, u. s. w.

So hätten wir nun die beiden vornehmsten Eigenschaften angezeigt, die bei Veränderung der Glieder eines Verhältnisses wahrgenommen werden konnten, wir nehmen also blos noch hier den von selbst einleuchtenden Grundsatz an, welcher auch künftig bei den geometrischen Verhältnissen gelten kann:

Wenn zwei Verhältnisse einer dritten gleich sind, so müssen sie unter sich gleich seyn.

Wäre demnach das Verhältniß 7 — 12 so groß, als 18 — 23; und auch 34 — 39 so groß als 18 — 23, so folgt, daß die Verhältnisse 7 — 12, 34 — 39, und 18 — 23 einander gleich sind; u. s. w.

§. 114.

Sollen wir nunmehro zwei arithmetische Verhältnisse miteinander vergleichen, oder bestimmen, daß dieselben gleich groß sind; so müssen wir nothwendig bei ihnen erkennen, daß deren Glieder eine gleiche Entstehung haben; finden wir also diese Eigenschaft, so können wir sie mit dem Zeichen der Gleichheit verbinden, und sprechen: Beide Verhältnisse geben eine arithmetische Proporzion oder Verhältnißgleichung.

Wir verstehen demnach unter einer arithmetischen Proporzion nichts anders, als die Gleichheit zweier arithmetischen Verhältnisse. Dergleichen also 4 — 6 = 7 — 9 und 8 — 3 = 12 — 7 u. s. w. seyn würden.

§. 115.

Nach Beschaffenheit der Glieder der Verhältnisse, welche die Proporzionen bestimmen, erhalten dieselben folgende besondere Benennungen.

Sind

Sind alle Glieder in einer Proporzion verschieden, wie in 4 — 6 = 7 — 9, und 8 — 3 = 12 — 7 ꝛc. so nennet man sie eine abgesonderte Proporzion.

Ist das zweite Glied des einen Verhältnisses, dem ersten Gliede des andern gleich, wie in 8 — 11 = 11 — 14, oder 19 — 14 = 14 — 9, so heißt sie eine zusammenhängende oder stetige Proporzion.

Oft wird auch diese Proporzion blos durch die drei verschiedenen Größen folgendergestalt ausgedrückt ÷ 8, 11, 14 und ÷ 19, 14, 9 von denen die mittlere immer zweimal zwischen der andern gesetzt werden muß, wenn man sie auf vorige Art vorstellen soll.

Sind die beiden Verhältnisse, die sie bestimmen, Verhältnisse der Gleichheit, wie in 6 — 6 = 8 — 8, so heißt sie eine Proporzion der Gleichheit.

Endlich können zwei, in Gestalt einer Proporzion gesetzte Verhältnisse, zuweilen auch nur dann eine richtige Proporzion bestimmen, wenn das eine verkehrt genommen wird, wie in 4 — 6 = 9 — 7, oder 11 — 8 = 11 — 14, wo aus erstern 4 — 6 = 7 — 9 und aus letzterm 8 — 11 = 11 — 14 entstehet, und dann wird gesagt: es sind verkehrte Proporzionen.

§. 116.

Ehe wir nun die Eigenschaften dieser Proporzionen aufsuchen, wollen wir uns noch einige bei denselben gebräuchliche Ausdrücke bekannt machen, um sich bei den vorkommenden Sätzen kürzer fassen zu können.

So wie die Größen eines Verhältnisses dessen Glieder genannt wurden (§. 112.), so werden auch hier die Größen jeder Proporzion, deren Glieder genannt; demnach bestehet eine jede aus vier Gliedern, die nach ihrer Ordnung das 1te, 2te, 3te und 4te Proporzional-Glied heißen.

Ferner, da bei gleichen Verhältnissen, die zweiten Glieder aus den erstern, oder umgekehrt, auf

gleiche Art entstehen, so werden das 1te und 3te Glied, wie das 2te und 4te, gleichnamige Glieder genannt.

Endlich, da das erste und vierte, das zweite und dritte gleichsam in die Mitte nehmen, so heißen erstere die äußeren Glieder, und letztere die mittleren Glieder einer Proporzion.

Sehen wir aber bei einer stetigen Proporzion blos auf die Verschiedenheit der Glieder, so hat dieselbe deren nur drei, von welchen man das erste und dritte ihre äußeren Glieder, und das zweite ihr mittleres Proporzional-Glied nennet.

Bei dieser Proporzion haben wir also wohl zu merken, daß das dritte Proporzional-Glied keine andere Größe sey, als das vierte Proporzional-Glied, sobald man in natürlicher Ordnung zum erstern das mittlere als zweites und drittes setzet.

§. 117.

Die erste und wichtigste Eigenschaft, welche einer jeden arithmetischen Proporzion zukömmt, ist: daß die Summe ihrer äußern Glieder stets der Summe ihrer mittlern Glieder gleich sey.

Wäre also die arithmetische Proporzion $4 - 7 = 8 - 11$, oder $15 - 8 = 26 - 19$; so können wir behaupten, daß von der ersten $4 + 11 = 7 + 8$, wie von der andern $15 + 19 = 8 + 26$ sey.

Um uns hiervon allgemein zu überzeugen, können wir von den gegebenen Proporzionen eine beliebig nehmen, so z. E. die erste $4 - 7 = 8 - 11$, und sprechen: da ihre Verhältnisse einander gleich sind, so müssen sie gleiche Differenzen haben (§. 113.); setzt man also diese zu den ersten gleichnamigen Gliedern, so müssen die entstehenden Summen den gleichnamigen zweiten Gliedern gleich seyn, welchem zufolge offenbar die Proporzion der Gleichheit $(3 + 4) - 7 = (3 + 8) - 11$ entstehet.

Machen

Machen wir hier jetzt die Summe der äußern und mittlern Glieder, so folgt (nach §. 35. f.), daß sie einander gleich seyn müssen; also ist $3+4+11=7+3+8$; und ziehen wir endlich von beiden entstandenen Größen die Differenz ab, so erhellet, nach eben dem angeführten §., daß auch $4+11=7+8=15$; d. h. von der gegebenen Proporzion muß die Summe der äußeren Glieder der Summe der mittlern gleich seyn.

Da dieser Beweis bei jeder beliebigen Proporzion geführt werden kann, so folgt, daß bei einer stetigen Proporzion, die wir unter drei Glieder betrachten, die Summe der äußeren Glieder doppelt so groß als das mittlere; und umgekehrt, das mittlere halb so groß als die Summe der beiden äußern sey.

So wäre demnach von $\div 4, 9, 14$ offenbar $4+14 = 2.9$; und umgekehrt $9=\frac{4+14}{2}=\frac{18}{2}$ u. s. w.

Also müssen wir immer die mittlere arithmetische Proporzionalzahl zwischen zwei gegebenen erhalten, wenn man deren halbe Summe nimmt.

Würden also die Zahlen 4 und 20, oder 3 und 6 in dieser Absicht gegeben, so setzten wir: $\div 4, \frac{4+20}{2}, 20 = \div 4, 12, 20$; und auch $\div 3, \frac{3+6}{2}, 6 = \div 3, 4\frac{1}{2}, 6$ u. s. w.

§. 118.

Der vorigen erkannten Wahrheit gemäß, erhellet ferner: daß die Summe aller Glieder einer abgesonderten Proporzion stets dem Produkt gleich seyn muß, welches entstehet, wenn man die Summe der äußeren Glieder mit 2 multipliziret.

Wäre z. B. die Summe der Glieder von $15-8 = 26-19$ zu bestimmen; so setzten wir $(15+19).2 = 34.2 = 68$.

Ferner: daß die Summe der Glieder einer stetigen Proporzion gefunden werden muß, wenn man die Summe der äußern Glieder ein und ein halbmal nimmt, oder dieselbe mit 3, als so viel Glieder die Proporzion enthält, multiplizirt, und das entstehende Produkt mit 2 theilet, weil das mittlere nur die Hälfte der Summe der äußeren enthält.

Würde also die Summe von ∸ 8, 12, 16 verlangt, so setzen wir $(8+16).1\frac{1}{2} = \frac{(8+16)}{2}.3 = \frac{24.3}{2} = 36.$

Vergleichen wir hier die gefundene Summe 36 mit dem mittleren Proporzional-Gliede 12, so werden wir gewahr, daß dieses genau ihren dritten Theil enthalte, der immer um so viel größer als das erste Glied seyn muß, als er kleiner, denn das dritte ist.

Daher kömmt es, daß man nicht allein bei dreien, sondern mehrerern Größen auf ähnliche Art verfährt, um eine solche zu erhalten, die gleichsam den **mittleren Werth**, oder das **Mittel** zwischen den gegebenen hält, welche im gemeinen Leben oft verlangt wird.

Werden demnach vier, fünf ꝛc. Größen gegeben, so macht man ihre Summe, und theilet dieselbe mit 4, 5 u. s. w.

Würde also z. E. gefragt: **wie weit wirft ein Mortier, der nach bestmöglichsten Versuchen folgende vier Wurfweiten gab;** nemlich zur ersten 1312 Schritt, zur zweiten 1126, zur dritten 1450, und zur vierten 1112? so würden wir ihre Summe durch 4 theilen, und also antworten: er werfe $\frac{1312+1126+1450+1112}{4} = \frac{5000}{4} =$ 1250 Schritt, welches die mittlere **Wurfweite** ist, weil man auf die gethane Frage, keine der gegebenen Wurfweiten zur Antwort geben könnte, ohne der Wahrheit zu nahe zu treten: denn so würde dieselbe durch

1450 Schritt viel zu groß und durch 1112 viel zu klein angegeben werden, um sich nach ihr bei diesem Geschütz richten zu können.

Uebrigens ist einleuchtend, daß man diese Frage um so viel richtiger beantworten kann, je mehrere Würfe man gethan, und aus denselben die mittlere Wurfweite bestimmt hat.

Ferner: wären bei einer Affaire vom Regiment A. 320 Mann, von B. 370, von C. 280, von D. 158, von E. 417, und von F. 613 geblieben, und man wollte wissen, wieviel Verlust die Regimenter im Durchschnitt gehabt; so setzen wir: weil A. 320 Mann
B. 370 „
C. 280 „
D. 158 „
E. 417 „
F. 613 „ Verlust hat, so tragen sämtliche
2158 Mann, mithin im Durchschnitt jedes Regiment $\frac{2158}{6} = 359$ bis 360 Mann.

Sollten also die Regimenter gleich stark bleiben, so müßte das Regiment F. 613 — 360 = 253 M., E. 417 — 360 = 57 M., und B. 370 — 360 = 10 Mann von den übrigen Regimentern ersetzt bekommen.

Oder hätte man zu verschiedenen Zeiten Pulver kaufen müssen, und gefunden, daß man zum erstenmal 4 Centner mit 114 Thl., zum andernmal 6 Centner mit 192 Thl, und zum drittenmal 2 Centner mit 52 Thl. bezahlen mußte; man wollte dann wissen, wie hoch jeder Centner in Rechnung zu bringen wäre? so setzen wir:

4 Centner	kosten	114 Thl.
6 :	:	192 :
2 :	:	52 :
12 Centner	kosten	358 Thl.

mithin ein jeder Centner $\frac{358}{12} = 29\frac{10}{12}$ Thl. $=$ 29 Thl. 20 Gr.

Hätten wir hier nach dem Einkauf der 4 Centner die Bestimmung machen wollen, so würde jeder Centner nicht mehr als $\frac{114}{4}$ Thl. $=$ 28 Thl. 12 Gr. gekostet haben, welcher Preis offenbar zu geringe seyn, und die Rechnung nach geschehener Durchsicht für unrichtig erkannt werden würde; und ähnliche Bewandniß würde es auch bei den andern auf gleiche Art gemachten Bestimmungen haben, weshalb keine andere, als die, so den mittleren Preis 29 Thl. 20 Gr. angiebt, statt finden darf.

Offenbar sind hier mehrere Beispiele überflüßig, also kehren wir zurück.

§. 119.

Da in jeder arithmetischen Proporzion die Summe der äußeren Glieder, der Summe der mittlern Glieder gleich ist, (§. 117), so kann man dieser erkannten Wahrheit gemäß, die Aufgabe: **jedes fehlende Glied einer Proporzion zu finden**, dadurch auflösen, daß man von der Summe der vorhandenen mittlern oder äußeren Glieder, das eine äußere oder mittlere Glied abziehet.

Gesetzt, daß man das vierte Glied von $8 - 13 = 2 -$ verlangte, so würde solches $(13 + 2) - 8 = 15 - 8 = 7$ seyn, und wir würden also setzen: $8 - 13 = 2 - 7$; denn es ist klar, daß die gefundene Differenz 7 zu dem ersten Gliede 8 addiret, die Summe der beiden mittlern Glieder hervorbringen muß; oder mit andern Worten, daß dann die beiden äußern Glieder zusammengenommen,

men, wie die beiden mittlern gleiche Summen geben müssen, woran eben eine arithmetische Proporzion erkannt wird.

Eben so ist es, wenn man ein fehlendes mittleres Glied bestimmt. Wäre z. E. 5 — ═ 8 — 17 gegeben; so würde (5 + 17) — 8 ═ 22 — 8 ═ 14 das fehlende Glied, und mithin 5 — 14 ═ 8 — 17 die Proporzion seyn. ꝛc. ꝛc.

Siehet man aber bei einer stetigen Proporzion, blos auf deren drei verschiedene Glieder, so verstehet man unter der Aufgabe: deren drittes Proporzionalglied zu bestimmen, eigentlich dessen viertes, weshalb man das zweite immer doppelt setzen muß. Gesetzt, man verlangte das dritte Proporzionalglied von 5 und 7, so setzen wir: 5 — 7 ═ 7 — , da nun hier das vierte, wie oben, keine andere Größe, als (7 + 7) — 5 ═ 14 — 5 ═ 9 seyn kann, so folgt, daß 5 — 7 ═ 7 — 9 oder ÷ 5, 7, 9, ist, u. s. w.

Ohngeachtet wir nun mehrere Eigenschaften dieser Proporzionen anzeigen könnten, so übergehen wir sie dennoch, weil dieselben nicht zu unserm Zweck nothwendig sind. Wir wenden uns also zu den geometrischen Verhältnissen und Proporzionen, welche wir inskünftige immer verstehen, aber die bisherigen ausdrücklich benennen werden, sobald diese gemeinet seyn sollten.

Von den geometrischen Verhältnissen und Proporzionen.

§. 120.

Denken wir der von einem geometrischen Verhältnisse gegebenen Erklärung (§. 111.) nach, so wird uns einleuchtend, daß es eigentlich durch den Quozienten bestimmt werde, welcher entstehet, sobald die erste Größe durch die andere getheilet wird.

Demnach sind auch in jedem dieser Verhältnisse drei Größen zu bemerken; als die beiden gegebenen, die wiederum dessen Glieder heißen, und der aus ihnen entstehende Quozient, den wir dessen Exponenten *) nennen.

Nehmen wir also aus gedachtem §. von neuem die Größen 6 und 2 zu dieser Bestimmung; so heißen sie die Glieder des Verhältnisses, und $\frac{6}{2} = 3$ dessen Exponent; nehmen wir aber diese Größen umgekehrt, wie 2 und 6, so kann deren Exponent nicht mehr 3, sondern er muß $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ seyn.

Da nun bei gleichen Verhältnissen die zweiten Glieder aus den ersten; oder auch umgekehrt, die ersten Glieder aus den zweiten, schlechterdings auf gleiche Art entstehen müssen, und dieses nur geschehen kann, wenn man im ersten Fall die ersten Glieder mit gleichen Zahlen, (die keine andere als gedachte Exponenten seyn können) theilet; und im andern Fall, die zweiten Glieder mit gleichen Exponenten multiplizirt; so folgt, daß die beiden entstehenden Verhältnisse aus 2 und 6, wie aus 6 und 2 wegen ihrer verschiedenen Exponenten $\frac{1}{3}$ und 3, verschiedene Verhältnisse seyn müssen.

Dagegen würden wir diejenigen für gleiche Verhältnisse anerkennen, welche von den Größen 2 und 3, 4 und 6 u. s. w., oder von 12 und 4, 15 und 5 u. s. w. bestimmt werden, weil erstere $\frac{2}{3}$, und leztere 3 zum gemeinschaftlichen Exponenten haben.

Und

*) Auch wird dieser zuweilen der Name des Verhältnisses genannt.

Und da von diesen gleichen Verhältnissen diejenigen die einfachsten sind, welche 1 zum Exponenten, d. h. gleiche Glieder haben; so nennen wir auch nur diese Verhältnisse der Gleichheit, wie die Größen 2 und 2, 3 und 3 u. s. w. geben würden.

Um aber die Bestimmung voriger Größen anzuzeigen, wollen wir stets das Divisions-Zeichen zwischen ihnen setzen, so daß 6:2, 2:6 u. s. w. verschiedene Verhältnisse; ferner 2:3, 4:6 u. s. w. oder 12:4, 15:5 u. s. w. gleiche Verhältnisse; endlich 2:2, 3:3 u. s. w. Verhältnisse der Gleichheit vorstellen.

§. 121.

Da wir jetzt wissen, daß nur gleiche Exponenten gleiche Verhältnisse bestimmen, so ist einleuchtend, daß hier, eine unendliche Menge gleicher Verhältnisse anzugeben, weiter nichts erfordert wird, als daß die unendliche Menge verschiedener Zahlen, als erste Glieder genommen, entweder mit einer ganzen, oder gebrochenen Zahl dividirt werden dürfen, ihre zustimmenden zweiten Glieder zu erhalten. Es müssen demnach 2:4, 3:6, 4:8 u. s. w. wie 10:5, 8:4, 6:3 u. s. w. unter sich gleiche Verhältnisse seyn, weil von erstern die Exponenten $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, dem theilenden Bruche $\frac{1}{2}$ (n. §. 72.), und von letzteren $\frac{10}{5}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{6}{3}$, der theilenden Zahl 2 (n. §. 65.) gleich sind.

Betrachten wir nun sämtliche Exponenten genau, wie sie geradezu von den Gliedern der Verhältnisse bestimmt werden; so finden wir, daß sie entweder Brüche, oder ganze Zahlen sind, welche die Gestalt der Brüche haben, von welchen die Zähler immer die ersten Glieder, und die Nenner immer die zwei-

ten Glieder sind: daher können wir uns stets die Verhältnisse unter, oder in Gestalt solcher Brüche vorstellen, deren Zähler die ersten Glieder, die Nenner ihre zweiten Glieder, und sie selbst deren Exponenten geben; mithin auch aus ihrem gleichen oder verschiedenen Werthe sogleich urtheilen, ob ihre Glieder gleiche oder verschiedene Verhältnisse bestimmen.

Erinnern wir uns aber auch, daß der Werth eines Bruchs nicht verändert wird, wenn man dessen Glieder mit gleichen Zahlen multiplizirет oder theilet, (§. 65.) so folgt darnach ganz natürlich: daß die Verhältnisse, deren Glieder mit gleichen Zahlen multiplizirt oder dividirt werden, unverändert bleiben.

Wären demnach die Verhältnisse 2:3, und 9:12 gegeben, so müssen sowohl die Verhältnisse 2:3 und (2.3):(3.3.) oder 6:9; als 9:12 und $\frac{9}{3} : \frac{12}{3}$ oder 3:4 unter sich gleich seyn: denn da $2:3 = \frac{2}{3}$, und $\frac{2}{3} = \frac{2.3}{3.3} = \frac{6}{9}$, so folgt, daß die Verhältnisse 2:3 und 6:9 einander gleich sind; welches auf ähnliche Art für die Verhältnisse 9:12 und 3:4 erhellet.

§. 122.

Und nun kann verlangt werden: ein in Brüchen gegebenes Verhältniß, wie $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$, in ein Verhältniß ganzer Zahlen zu verwandeln, welches nach anerkannter Wahrheit folgendermaßen leicht gefunden wird: denn bringen wir diese Brüche unter gleiche Benennung, (n. §. 74.) so ist klar, daß $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ und $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ ist, mithin

hin müssen auch die Verhältnisse $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$ und $\frac{15}{20} : \frac{8}{20}$ einander gleich seyn; multipliziren wir endlich die Glieder des letzten mit 20, wodurch das Verhältniß unverändert bleibt, so folgt, daß die Verhältnisse $\frac{15}{20} : \frac{8}{20}$ und 15:8, mithin auch $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$ und 15:8 nach dem bekannten Grundsatz (§. 113.) einander gleich sind.

Vergleichen wir jetzt die Glieder der Verhältnisse $\frac{15}{20} : \frac{8}{20}$ und 15 : 8, so entdecken wir die Eigenschaft, daß **Brüche von gleichen Nennern, sich genau, wie ihre Zähler verhalten.**

Würde aber das Verhältniß $\frac{7}{8} : \frac{7}{12}$ in ganzen Zahlen verlangt, so könnten wir wiederum sagen: daß, weil $\frac{7}{8} = \frac{7.12}{8.12}$ und $\frac{7}{12} = \frac{7.8}{12.8}$, die Verhältnisse $\frac{7}{8} : \frac{7}{12}$ und 7.12:7.8, oder, indem wir die Glieder des letztern mit 7 theilen, $\frac{7}{8} : \frac{7}{12}$ und 12 : 8 einander gleich sind: und vergleichen wir wiederum deren Glieder mit einander; so erhellet: daß **Brüche von gleichen Zählern sich gegen einander verhalten, wie ihre Nenner verkehrt genommen.**

§. 123.

Da in gleichen Verhältnissen die ersten Glieder entstehen, wenn die zweiten mit ihren Exponenten multiplizirt werden (§. 120.) so müssen bei denselben, weil die Exponenten entweder ganze oder gebrochene Zahlen sind,

sind, die ersten Glieder die zweiten, oder einen gleich bestimmten Theil derselben, genau gleich vielmal enthalten.

Wir mögen also von gleichen Verhältnissen die zweiten Glieder in eine noch so große gleichbestimmte Menge Theile theilen, so würde immer von denselben eine gleiche Anzahl in ihren zustimmenden ersten Gliedern enthalten seyn.

Gesetzt, daß man die gleichen Verhältnisse 3:4 und 12:16 hätte, und wir theilen die zweiten Glieder mit 4, so ist klar, daß $\frac{4}{4} = 1$, und $\frac{16}{4} = 4$ ist; da nun das erste Glied 3 vom ersten Verhältniß 3:4 den 4ten Theil des zweiten Gliedes 3 mal enthält, so muß auch das erste Glied 12 vom 2ten Verhältniß 12:16 den 4ten Theil seines zweiten Gliedes 3 mal genau enthalten; und so ist wirklich $3.4 = 12$. Oder würden uns die Verhältnisse 9:5 und 54:30 gegeben, und wir theileten die zweiten Glieder in 10 gleiche Theile, so würde 0,5 von 5, und 3 von 30 der zehnte Theil seyn; nun enthält aber 54 die 3 offenbar 18 mal, folglich muß 9 die 0,5 auch 18 mal enthalten, und wirklich ist $18 : 0,5 = 9,0$.

Und wären uns endlich die Verhältnisse 8:2 und 24:6 gegeben, so sehen wir wohl, daß 2 in 8, wie 6 in 24 genau 4 mal enthalten ist; theilen wir aber auch hier die zweiten Glieder in 100 gleiche Theile, so würde 0,02 von 2, und 0,06 von 6 der 100te Theil seyn; nun enthält aber 8 die 0,02 offenbar 400 mal, also muß auch 24 die 0,06 ebenfalls 400 mal enthalten; und wirklich ist $0,06 . 400 = 24$.

Da wir nun von allen möglichen gleichen Verhältnissen, ihre Glieder mögen sonst so verschieden seyn, als sie immer wollen, dieselbe Anwendung machen können, so läßt sich auch darthun: daß von jeder beliebigen Menge gleicher Verhältnisse, die Summe der ersten

sten

sten Glieder sich zu der Summe der zweiten Glieder, wie jedes erste Glied zum zustimmenden zweiten Gliede jedes gegebenen Verhältnisses verhalte; d. h. daß die Summe der Glieder ein solches Verhältniß bestimme, was jedem gegebenen gleich ist.

Wären uns demnach die gleichen Verhältnisse 2:3 und 4:6 gegeben, so können wir schließen, daß das Verhältniß (2+4):(3+6) oder 6:9, von welchem das erste Glied die Summe der ersten Glieder, und das zweite die Summe der zweiten Glieder von den gegebenen Verhältnissen enthält, den Verhältnissen 2:3 und 4:6 gleich sey: denn da bekannt ist, daß das erste Glied des erstern Verhältnisses eben so viel Theile von seinem zweiten Gliede, als das erste Glied des zweiten Verhältnisses von seinem zweiten enthalten muß; so ist offenbar, daß die ersten Glieder zusammengenommen, oder deren Summe, eine eben so große Menge Theile von der Summe der zweiten Glieder enthalten, als jedes erste Glied von dem zweiten Gliede seines Verhältnisses, d. h. (dem zufolge, was wir oben anerkannt haben) daß die Summe der ersten Glieder sich zur Summe der zweiten Glieder verhält, wie jedes erste Glied jedes gegebenen Verhältnisses zu seinem zustimmenden zweiten Gliede.

Weil dieser Beweis auf ähnliche Art bei mehreren gegebenen gleichen Verhältnissen geführt werden kann; so können wir immer schließen, daß z. E. von den Verhältnissen 3:2, 9:6, 15:10, 33:22 u. s. w. nicht nur das Verhältniß (3+9):(2+6) oder 12:8, von den beiden ersten Verhältnissen, sondern auch das Verhältniß (3+9+15):(2+6+10) oder 27:18 von den drei ersten Verhältnissen; wie das Verhältniß (3+9+15+33):(2+6+10+22) oder 60:40 von den sämtlichen Verhältnissen u. s. w. jedem der gegebenen 3:2, 9:6, 15:10, 33:22 gleich sey.

Dieser Satz ist wohl zu merken, weil man ihn in der Geometrie bei den ähnlichen Figuren anwendet, um die bei ihnen vorkommenden gleichen Verhältnisse darzuthun.

§. 124.

Werden eine Menge beliebiger Verhältnisse gegeben, und man setzt das Produkt ihrer ersten Glieder mit dem Produkt ihrer zweiten Glieder in Verhältniß, so wird dasselbe das zusammengesetzte Verhältniß der gegebenen, und hingegen die gegebenen, die zusammensetzende Verhältnisse genannt.

Würde z. B. das zusammengesetzte Verhältniß der zusammensetzenden Verhältnisse 5:3, 7:15, 9:21, 12:14 verlangt; so können wir sie untereinander setzen,

5 : 3
7 : 15
9 : 21
12 : 14

und es würde (5.7.9.12):(3.15.21.14) oder 3780: 13230 das verlangte zusammengesetzte Verhältniß seyn.

Erinnern wir uns aber, daß ein Verhältniß unverändert bleibt, wenn man dessen Glieder mit gleichen Zahlen theilet, (§. 121.) so können wir gleich anfangs, ehe die Produkte gemacht werden, eine oft beträchtliche Multiplikazion dadurch vermeiden, daß wir die durch gleiche Zahlen theilbaren ersten und zweiten Glieder der zusammensetzenden Verhältnisse vorher theilen, und so einige einander gleich wären, gegen einander aufheben. Wären also vorige Verhältnisse wiederum gegeben, so setzen wir

zuerst 1 $\cancel{5}:\cancel{3}$ 1 und dann 1:1
1 $\cancel{7}:\cancel{15}$ $\cancel{3}$ 1   1:1
1 $\cancel{9}:\cancel{21}$ $\cancel{3}$ 1   1:1
2 $\cancel{4}$ $\cancel{12}:\cancel{14}$ 7   2:7

mithin wäre das zusammengesetzte Verhältniß 2:7 dem obigen 3780:13230 gleich, von dem wir auch gegenwärtiges finden, wenn wir dessen Glieder mit 1890 theilen: denn daß das Verhältniß 2:7 entstehen mußte, wird hier einleuchtend, weil das erste Glied 5 im zweiten Gliede 15 des zweiten Verhältnisses genau 3 mal enthalten war; ferner

ferner gab diese 3 mit der über ihr stehenden multiplizirt, 9, die sich mit dem ersten Gliede 9 des dritten Verhältnisses aufhebt; eben so war 7 in 21, 3 mal, und diese 3 wiederum in 12, 4 mal; und endlich 2 in 4, 2 mal, und in 14, 7 mal enthalten.

Diese zusammengesetzte Verhältnisse sind darum zu behalten, weil hier die Regel der Intereßrechnung und noch andere auf ihnen beruhen, und weil sie in der Geometrie die Verhältnisse bestimmen, in welchen Flächen und Körper, unter sich verglichen, gegeneinander stehen.

Uebrigens müssen wir bei jedem Verhältniß dahin trachten, es so einfach als möglich vorzustellen, welches dadurch geschiehet, daß wir den grösten gemeinschaftlichen Divisor seiner beiden Glieder, wie schon oben (§. 77.) gezeiget worden, suchen, und mit ihm in selbige theilen. Würde demnach das Verhältniß 240:672 auf irgend eine Art gefunden, und wir wollten es einfacher vorstellen, so würden wir setzen:

240 | 672 | 2
| 192 | 240 | 1
48 | 192 | 4

und mithin 48 zum größten gemeinschaftlichen Divisor finden, also auch das Verhältniß 240:672 durch (240:48):(672:48) d. h. durch 5:14 vorstellen können, u. s. w.

Weil hiermit von den Verhältnissen alles, was zu unserm Zweck dienet, angezeigt ist, so schreiten wir zu den Proporzionen.

§. 125.

Aus eben den Gründen, warum zwei gleiche arithmetische Verhältnisse eine arithmetische Proporzion geben mußten, (§. 114.) bestimmen auch hier zwei gleiche geometrische Verhältnisse, eine geometrische Proporzion.

Würden

Würden demnach die gleichen Verhältnisse 4:6 und 8:12, wie 9:3 und 15:5 gegeben, so bestimmten dieselben die Proporzionen 4:6 = 8:12, oder 8:12 = 4:6; und 9:3 = 15:5, oder 15:5 = 9:3.

Da die Benennungen dieser Proporzionen, wie ihrer Glieder, von diesen ihren Beschaffenheiten so abhängen, wie bei den arithmetischen (§. 115, 116.) gezeiget worden; so heißen diese angegebenen, **abgesonderte** Proporzionen.

Hingegen 3:6 = 6:12, und 18:12 = 12:8 **zusammenhängende oder stetige** Proporzionen, die wir nach ihren verschiedenen Gliedern durch $\div$ 3, 6, 12, und $\div$ 18, 12, 8 anzeigen können.

Ferner 5:5 = 7:7 Proporzionen **der Gleichheit**; und

Endlich 4:6 = 12:8, und 15:5 = 3:9 **verkehrte** Proporzionen, von welchen sämmtlichen die verschiedenen Benennungen ihrer Glieder zu wiederholen überflüßig seyn würde.

§. 126.

Die erste und vornehmste Eigenschaft einer Proporzion ist: **daß das Produkt ihrer äußeren Glieder dem Produkte ihrer mittleren gleich sey.**

Würde uns demnach die Proporzion 3:14 = 15:70 gegeben, so können wir behaupten, daß 3.70 = 14.15 sey.

Uns davon zu überzeugen, sprechen wir: da gleiche Verhältnisse gleiche Brüche geben müssen, deren Zähler ihre ersten Glieder, und die Nenner ihre zweiten Glieder sind; (§. 121.) aber nur gleiche Verhältnisse eine Proporzion bestimmen können (§. 125.), so ist klar, daß hier $\frac{3}{14} = \frac{15}{70}$ ist; bringen wir nun diese beiden Brüche

auf

auf gleiche Benennung (n. §. 74.), so verändert sich deren Werth nicht; also ist $\frac{3.70}{14.70} = \frac{14.15}{14.70}$. Multipliziren wir endlich diese beiden gleichen Größen mit den gleichen Zahlen 14.70, so müssen wiederum gleiche Größen entstehen, (§. 59. b.) und so folgt, daß $3.70 = 14.15 = 210$ sey.

Eben so ist klar, daß von der stetigen Proporzion $3:6 = 6:12$ auch $3.12 = 6.6$ sey, da nun hier das Produkt $6.6 = 6^2$, so folgt, daß in solcher stetigen Proporzion, nach ihren drei verschiedenen Gliedern betrachtet, wie ÷ 3, 6, 12, die mittlere Proporzional-Größe stets die Quadratwurzel aus dem Produkt der beiden äußeren Glieder sey; also ist $6 = \sqrt{3.12}$.

Demnach bestimmen wir von zweien Zahlen immer die mittlere geometrische Proporzionalzahl, wenn wir vom Produkt der gegebenen die Quadratwurzel nehmen. Wären also die Zahlen 18 und 8 gegeben, so muß deren mittlere Proporzionalzahl $\sqrt{8.18} = \sqrt{114} = 12$ seyn, und wir können setzen ÷ 18, 12, 8, wie oben.

Würden ferner die Zahlen 4 und 6 gegeben, so ist ihre mittlere Proporzionalgröße $\sqrt{4.6} = \sqrt{24}$, d. h. eine Irrazionalzahl, deren Werth in Zahlen nicht genau angegeben werden kann, (§. 97.) und mithin müssen wir uns durch die Näherung seines Werths, wie es §. 98. gezeiget worden, begnügen, oder diese blos angedeutete Größe zwischen die andern stellen, wie hier ÷ 4, $\sqrt{24}$, 6.

Ohngeachtet die Irrazionalgröße nicht nach ihrem wahren Werth angegeben werden kann, so bleibt sie doch eine wirkliche Größe, die wir in der Geometrie durch eine Linie vorzustellen Gelegenheit erhalten werden.

§. 127.

Da nun von einer Proporzion das Produkt der äusseren Glieder stets dem Produkte der mittlern Glieder gleich ist, so folgt daraus ganz natürlich umgekehrt: **daß von den Faktoren zweier gleichen Produkte jederzeit eine Proporzion erhalten werden muß, sobald die Faktores des einen zu ihren mittlern Gliedern, und die Faktores des andern zu ihren äußern genommen werden.**

Würde also die Zahl 24 als ein Produkt betrachtet, das sowohl in die Faktores 3 und 8 als in 4 und 6 aufgelöset wäre; so können wir nach denselben folgende Proporzionen nehmen; als

$$\left.\begin{array}{llll} 1) & 3:4 = 6:8 & \text{weil} & 3.8 = 4.6 \\ 2) & 3:6 = 4:8 & " & 3.8 = 6.4 \\ 3) & 4:3 = 8:6 & " & 4.6 = 3.8 \\ 4) & 4:8 = 3:6 & " & 4.6 = 8.3 \\ 5) & 6:3 = 8:4 & " & 6.4 = 3.8 \\ 6) & 6:8 = 3:4 & " & 6.4 = 8.3 \\ 7) & 8:6 = 4:3 & " & 8.3 = 6.4 \\ 8) & 8:4 = 6:3 & " & 8.3 = 4.6 \end{array}\right\} = 24.$$

von welchen vornemlich die drei ersten merkwürdig sind.

Denn betrachten wir die Ordnung, in welcher die Glieder der zweiten Proporzion gegen diejenige, in welcher eben diese Glieder bei der ersten Proporzion stehen; so finden wir, daß blos die mittlern Glieder 4 und 6 verwechselt sind; wornach wir schließen können:

a **Werden von einer Proporzion die mittlern Glieder verwechselt, so entstehet dadurch eine neue Proporzion: oder, in einer Proporzion verhält sich nicht allein das erste Glied zum zweiten, wie das dritte zum vierten; sondern auch, das erste Glied zum dritten, wie das zweite zum vierten.**

Und geben wir auf die Ordnung acht, in welcher die Glieder der dritten und ersten Proporzion stehen, so siehet

het man, daß die Verhältnisse der ersten, in der dritten umgekehrt stehen, wornach wir annehmen können:

b **Werden von einer Proporzion die Verhältnisse umgekehrt, so entstehet eine neue Proporzion; oder, in einer Proporzion verhält sich das zweite Glied zum ersten, wie das vierte zum dritten.**

Diese beiden Veränderungen, welche mit einer Proporzion vorgenommen werden können, müssen vornemlich wegen ihrer häufigen Anwendung behalten werden. Auf ihnen beruhet schon hier von den angegebenen Proporzionen die fünfte, welche aus der zweiten, wie die achte, welche aus der dritten (nach b.) gefolgert werden konnte. Was die andern anlanget, so sind sie blos durch Versetzung der Verhältnisse von den vorhandenen entstanden. So ist bei der sechsten Proporzion, das zweite Verhältniß der ersten; bei der vierten, das zweite Verhältniß der zweiten, und bei der siebenten, das zweite Verhältniß der dritten voran gesetzet worden.

§. 128.

Und nunmehro kann die Aufgabe: **ein fehlendes Glied einer Proporzion zu finden**, leicht aufgelöset werden.

Denn da immer das Produkt der äußern Glieder dem Produkte der mittlern Glieder gleich seyn muß; so haben wir weiter nichts zu beobachten, (nachdem zuvor die Proporzion, woferne es nöthig seyn sollte, so verändert worden ist, daß das fehlende Glied das vierte werde), als das **Produkt der mittlern Glieder zu machen, und in dasselbe mit dem bekannten äussern Gliede zu theilen**, wo dann der Quozient das fehlende äußere Glied bestimmt, weil ein Quozient mit seinem Divisor multiplizirt, (n. §. 52.) stets den Dividenden, (für welchen wir das Produkt der mittlern Glieder immer annehmen können) hervorbringen muß.

Würde uns also aufgegeben: die vierte Proporzional-Größe der Zahlen 8, 24 und 6 zu bestimmen; so setzen wir:

$$8 : 24 = 6 : \frac{24 \cdot 6}{8}$$

d. h. $8 : 24 = 6 : 18$

und so ist 18 die verlangte Proporzional-Größe.

Wäre von 4, 8 und 6 die dritte Proporzional-Größe zu suchen; so können wir statt

$4 : 8 = \quad : 6$ (n. §. 127. b.)

$$8 : 4 = 6 : \frac{4 \cdot 6}{8}$$

d. h. $8 : 4 = 6 : 3$ setzen,

und diese wiederum umgekehrt $4 : 8 = 3 : 6$, wo die Größe 3 als das verlangte Glied stehet, u. s. w.

Sollten wir aber das dritte Proporzional-Glied zweier Größen 4 und 8 finden; so verlangt man eigentlich die vierte Proporzional-Größe einer stetigen Proporzion, wie oben (§. 119.) bei einer arithmetischen auf ähnliche Art verlangt wurde.

Demnach müssen wir setzen:

$$4 : 8 = 8 : \frac{8 \cdot 8}{4}$$

d. i. $4 : 8 = 8 : 16$

oder $\div$ 4, 8, 16.

Müßte endlich ein fehlendes Glied einer verkehrten Proporzion bestimmt werden, so darf man nur das vorhandene Verhältniß umkehren, und dann wie bei den ersten Beispielen verfahren.

So würden wir dasselbe von den Größen 2, 6 und 9 erhalten, wenn wir setzten:

$$6 : 2 = 9 : \frac{2 \cdot 9}{6}$$

d. i. $6 : 2 = 9 : 3$

mithin $2 : 6 = 3 : 9$ u. s. w.

Von

In der Auflösung der vorigen und gegenwärtigen Aufgabe wird künftig die der geraden und der verkehrten Regel Detri erkannt werden.

Nehmen wir aber an, daß das vierte Glied einer abgesonderten Proporzion zu bestimmen wäre, deren erstes die Einheit ist; so sehen wir, daß solches immer das Produkt der beiden mittlern Glieder werden muß, wie in 1:2 = 3:6. Demnach erhellet: daß ein Produkt als das vierte Glied einer Proporzion angesehen werden kann, zu welchem sich der Multiplikand, wie die Einheit zum Multiplikator verhält.

Und wird dagegen 1 zum zweiten Gliede genommen, wie in 3:1 = 12:4, wo das vierte Glied nur erhalten werden kann, wenn man das dritte durch das erste theilet, so finden wir, daß es ein Quozient des ersten und dritten sey: Es ist also ein Quozient immer das vierte Glied einer Proporzion, zu dem sich der Dividend, wie der Divisor zur Einheit verhält.

Beide hier erkannte Wahrheiten stimmen auch mit denen für beide Rechnungsarten gegebenen Erklärungen (§. 38. u. 57.) völlig überein.

§. 129.

Da wir diejenigen für gleiche Verhältnisse anerkennen, in welchen die ersten Glieder von ihren zweiten eine gleichbestimmte Menge Theile enthalten (§. 123.); so ist offenbar, daß immer gleiche Verhältnisse aus vorgegebenen entstehen müssen, wenn man ihren ersten Gliedern eine gleich bestimmte Menge Theile ihrer zweiten Glieder, oder diese selbsten, d. i. alle ihre Theile zusetzet oder wegnimmt, weil eben dadurch in beiden Fällen die ersten Glieder eine gleich bestimmte Menge Theile ihrer zweiten Glieder erhalten. Weil nun jede beliebige Proporzion aus zwei gleichen Verhältnissen besteht, wie 15:5 = 21:7.

so können wir von solcher schließen: daß

$$a.\ (15+5):5=(21+7):7$$

und $$b.\ (15-5):5=(21-7):7$$

Ferner, da hier aus der gegebenen und den aus ihr gefolgerten Proporzionen (n. §. 127 a.) geschlossen werden kann

$$15:21=5:7$$
$$(15+5):(21+7)=5:7$$
$$(15-5):(21-7)=5:7$$

so folgt, (wenn wir die Verhältnisse dieser beiden letzten Proporzionen, mit denen der ersten vergleichen, nach dem bekannten Grundsatze, (§. 113.) daß

$$(15+5):(21+7)=15:21,$$

und $$(15-5):(21-7)=15:21$$

mithin (n. §. 127. a.)

$$c.\ (15+5):15=(21+7):21$$
$$d.\ (15-5):15=(21-7):21$$

und nach Vergleichung dieser beiden letzten Proporzionen

$$e.\ (15+5):(21+7)=(15-5):(21-7)$$

Vergleichen wir endlich die Glieder der fünf gefundenen und mit Buchstaben bezeichneten Proporzionen, mit den Gliedern der gegebenen; so erhellen allgemein folgende beiden Sätze:

In jeder Proporzion verhält sich die Summe oder Differenz des ersten und zweiten Gliedes, zum ersten oder zweiten; wie die Summe oder Differenz des dritten und vierten Gliedes, zum dritten oder vierten; (nach c. a. d. und b.) **und:**

Die Summen der Glieder der Verhältnisse verhalten sich gegen einander, (bei e.) **wie ihre Differenzen.**

Es ist leicht wahrzunehmen, daß von einer Proporzion noch mehrere ähnliche Eigenschaften gefolgert werden könnten, sobald wir ihre mittleren Glieder verwechselten,

selten, und vorbestimmte Sätze dabei anwendeten; allein, da wir uns mit diesen in der Geometrie, soviel es unsere Absicht erfordert, begnügen können, so gedenken wir ihrer nicht, um alle Weitläuftigkeit zu vermeiden.

§. 130.

Da Verhältnisse in nichts geändert werden, wenn man ihre Glieder mit gleichen Zahlen multiplizirt oder dividirt (§. 121.), und durch Verwechselung der mittlern Glieder einer Proporzion stets eine andere entstehet (§. 127. a.); so folgt, daß auch die gleichnamigen Glieder einer Proporzion mit gleichen Zahlen multiplizirt oder dividirt, wiederum eine Proporzion geben müssen.

Wäre demnach die Proporzion $5:25 = 12:60$ gegeben; so können wir von ihr schließen:

$$(5.6):25 = (12.6):60$$

d. h. a. $30 : 25 = 72 : 60$

wie auch $5 : (25.2) = 12 : (60.2)$

d. h. b. $5 : 50 = 12 : 120$

und $(5.6) : (25.2) = (12.6) : (60.2)$

d. h. c. $30 : 50 = 72 : 120$

Oder auch a′. $\left(\frac{5}{2}\right) : 25 = \left(\frac{12}{2}\right) : 60$

d. h. $2\frac{1}{2} : 25 = 6 : 60$

wie b′. $5 : \left(\frac{25}{4}\right) = 12 : \left(\frac{60}{4}\right)$

d. h. $5 : 6\frac{1}{4} = 12 : 15$

und endlich c′. $\left(\frac{5}{2}\right) : \left(\frac{25}{4}\right) = \left(\frac{12}{2}\right) : \left(\frac{60}{4}\right)$

d. h. $2\frac{1}{2} : 6\frac{1}{4} = 6 : 15$

denn

denn da $5 : 25 = 12 : 60$, so folgt (n. §. 127. a.)
daß $5 : 12 = 25 : 60$, und von dieser (n. §. 121.)
$(5.6) : (12.6) = 25 : 60$
d. h. $30 : 72 = 25 : 60$, mithin (wieder n. §. 127.)
$30 : 25 = 72 : 60$.
welches die zuerst bestimmte Proporzion ist.

Und auf gleiche Art können auch die übrigen gefolgert werden, wodurch die Allgemeinheit des hier vorgetragenen Satzes erkannt wird.

§. 131.

Von jeder Menge beliebiger Proporzionen geben die Produkte ihrer Glieder, nach ihrer Ordnung genommen, wiederum eine Proporzion: oder mit andern Worten; die aus den Verhältnissen jeder beliebigen Menge Proporzionen zusammengesetzten Verhältnisse bestimmen eine neue Proporzion.

Hätten wir also die beiden Proporzionen

$$4 : 12 = 8 : 24$$
und
$$5 : 2 = 15 : 6$$

so muß folgen, daß $(4.5) : (12.2) = (8.15) : (24.6)$
d. h. $20 : 24 = 120 : 144$

Uns hiervon zu überzeugen, erinnern wir, daß gleiche Verhältnisse gleiche Brüche geben, davon die Zähler die ersten Glieder, und die Nenner die zweiten sind, (§. 121.) wonach also offenbar

von der ersten Proporzion $\frac{4}{12} = \frac{8}{24}$

und von der zweiten $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$

folglich $\frac{4}{12} . \frac{5}{2} = \frac{8}{24} . \frac{15}{16}$ (n. §. 59.)

oder $\frac{20}{24} = \frac{120}{144}$

d. h. $20 : 24 = 120 : 144$ ist.

Da nun dieser Beweis auf ähnliche Art bei noch mehrerern Proporzionen geführet werden kann; so können wir immer schließen: wenn

$$\begin{array}{l} 2 : 4 = 9 : 18 \\ 8 : 3 = 56 : 21 \\ 5 : 12 = 15 : 36 \text{ ꝛc. ꝛc. ist,} \end{array}$$

daß auch $(2.8.5):(4.3.12) = (9.56.15):(18.21.36)$

d. h. $80 : 144 = 7560 : 13680$

oder $5 : 9 = 20 : 36$ sey.

Wählen wir aber solche Proporzionen, davon die Glieder nach einerlei Ordnung genommen, einander gleich sind; so folgt:

wenn $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 4 : 8 = 12 : 24 \\ 4 : 8 = 12 : 24 \end{array}\right\} \\ 4 : 8 = 12 : 24 \end{array}\right\}$

aus den beiden ersten $(4.4):(8.8) = (12.12):(24.24)$

oder $4^2 : 8^2 = 12^2 : 24^2$

oder auch $16 : 64 = 144 : 576$

und aus allen dreien $(4.4.4):(8.8.8) = (12.12.12):(24.24.24)$

oder $4^3 : 8^3 = 12^3 : 24^3$

oder auch $64 : 512 = 1728 : 13824$

d. h. indem wir die Glieder der beiden entstandenen Proporzionen mit denen der gegebenen vergleichen, (n. §.88. §.100.) daß stets die Quadratzahlen und Kubikzahlen (wie auch die höhern Potenzen §. 104.) unter sich in Proporzion stehen müssen, sobald ihre Wurzeln eine Proporzion bestimmen.

Und umgekehrt; (weil wir uns die Größen einer Proporzion auch als Quadrat- und Kubikzahlen vorstellen können) daß die Quadrat- und Kubikwurzeln (wie die 4ten, 5ten ꝛc. Wurzeln) unter sich eine Proporzion geben müssen, wenn ihre Quadrat- und Kubikzahlen (oder die höhern Potenzen) in Proporzion stehen.

$$\text{Ist also } 4 : 9 = 16 : 36, \text{ so folgt,}$$
$$\text{daß } \sqrt{4} : \sqrt{9} = \sqrt{16} : \sqrt{36}$$
$$\text{d. h. } 2 : 3 = 4 : 6$$

$$\text{Und wäre } 1 : 8 = 27 : 216, \text{ so folgt,}$$
$$\text{daß } \sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{216}$$
$$\text{d. h. } 1 : 2 = 3 : 6 \text{ ist, u. s. w.}$$

Diese Eigenschaften der Proporzionen kommen wiederum in der Geometrie bei den ähnlichen Flächen und Körpern in Betrachtung.

Endlich können wir noch solche Proporzionen nehmen, wo die Glieder ihrer zweiten Verhältnisse so beschaffen sind, daß das zweite des ersten Verhältnisses dem ersten des zweiten, das zweite des zweiten Verhältnisses dem ersten des dritten ꝛc. ꝛc. gleich ist.

Gesetzt, es wäre
$$\begin{aligned} 2 &: 3 = 8 : \cancel{12} \\ 4 &: 5 = \cancel{12} : \cancel{15} \\ 7 &: 21 = \cancel{15} : 45 \end{aligned}$$

so folgt, daß $(2.4.7) : (3.5.21) = 8 : 45$ ist, weil (n. §. 124.) die ausgestrichenen Glieder der zweiten Verhältnisse als gleiche Faktores, in ihren zusammengesetzten gekommen seyn würden.

Betrachten wir hier genau die gefundene Proporzion der zusammengesetzten Verhältnisse; so finden wir, daß in ihrem zweiten Verhältniß, von allen gegebenen zweiten Verhältnissen blos das erste Glied 8 von der ersten, und das zweite Glied 45 von der letzten vorkömmt. Nun müssen wir aber stets das vierte Glied einer Proporzion finden, (n. §. 128.) wenn wir das Produkt der mittlern Glieder durch das erste theilen; also folgt, daß auch hier dieses vierte Glied, wenn es verlangt würde, dadurch gefunden werden muß, wenn das dritte mit dem Produkte der zweiten Glieder multiplizirt, und durchs Produkt der ersten getheilet wird.

Dem=

Demnach können wir immer zu einer gegebenen Größe eine andere finden, die beide ein zusammengesetztes Verhältniß vorgegebener Verhältnisse bestimmen.

Würde z. B. gefragt: welche Größe macht mit 5 ein zusammengesetztes Verhältniß der Verhältnisse 3:4, 8:12, 13:52? so könnten wir setzen:

$$3 : 4 = 5 : \frac{4.5}{3}$$

$$8 : 12 = \frac{4.5}{3} : \frac{12.4.5}{3.8}$$

$$13 : 52 = \frac{12.4.5}{3.8} : \frac{52.12.4.5}{3.8.13}$$

und es folgte, daß $(3.8.13):(4.12.52) = 5 : \frac{52.12.4.5}{3.8.13}$

$= 5:40$ wäre.

Aber noch besser $\left\{\begin{array}{ccc} 3 & : & 4 \\ 8 & : & 12 \\ 13 & : & 52 \end{array}\right\} = 5 : \frac{5.4.12.52}{3.8.13}$

$= 5:40$ u. s. w.

In der Auflösung dieser Aufgabe beruhen sowohl die gerade als verkehrte zusammengesetzte Regel Detri, die Regel Quinque, u. s. w. die wir bald kennen lernen werden.

§. 132.

Und nun können wir noch der in der Summe gleicher Verhältnisse (§. 123.) erkannten Eigenschaft gemäß, die von ihnen herzuleitenden Proporzionen betrachten, nach welchen die Aufgabe: eine gegebene Zahl also einzutheilen, daß die Theile gegen sie in eben denselben Verhältnissen stehen, als vorgegebene Zahlen gegen ihre Summe; oder, eine Zahl verhältnißmäßig gegen eine andere zu theilen, aufgelöset werden kann.

Aus

Aus angezeigtem §. wissen wir, daß jedes Verhältniß von

$$\begin{array}{c} 3:2 \\ 9:6 \\ 15:10 \end{array}$$

dem Verhältniß $(3+9+15):(2+6+10)$ oder $27:18$ gleich ist; mithin können wir (n. §. 125) setzen:

$$\begin{array}{l} 27:18 = 3:2 \\ 27:18 = 9:6 \\ 27:18 = 15:10 \end{array}$$

verwechseln wir aber von diesen die mittlern Glieder, so erhalten wir

$$\begin{array}{l} 27:3 = 18:2 \\ 27:9 = 18:6 \\ 27:15 = 18:10 \end{array}$$

aus welchen offenbar erhellet, weil das, allen Proporzionen gemeinschaftliche, erste Glied 27 die Summe der zweiten Glieder, wie das allen Proporzionen gemeinschaftliche dritte Glied 18 die Summe der vierten Glieder ist; daß die Zahl 27 sich zu ihren Theilen 3, 9 und 15 genau so verhält, wie die Zahl 18 zu ihren Theilen 2, 6 und 10.

Nehmen wir also an, daß uns die Zahl 18 gegeben würde, die nach den Zahlen 3, 9 und 15 verhältnißmäßig getheilt werden sollte; so müssen wir von letztern die Summe 27 machen, und entweder schließen: wie sich diese Summe 27 gegen jeden ihrer Theile verhält, eben so muß sich die gegebene Zahl 18 zu jedem ihrer Theile verhalten; und folglich setzen:

$$27:3 = 18:\frac{3 \cdot 18}{27} = 2$$

$$27:9 = 18:\frac{9 \cdot 18}{27} = 6$$

und $$27:15 = 18:\frac{15 \cdot 18}{27} = 10$$

Oder

Oder noch besser nach den erstern Proporzionen: (weil das Verhältniß der Summe der gegebenen Zahl sich oft sehr einfach vorstellen läßt) wie sich die Summe der Zahlen, nemlich 27, zur gegebenen Zahl 18 verhält, eben so verhält sich jeder Theil der Summe zu einem gleich verhältnißmäßigen Theile der gegebenen Zahl.

Wir setzen also:

$$27:18 = 3:\frac{18.\ 3}{27} = 2$$

$$27:18 = 9:\frac{18.\ 9}{27} = 6$$

$$27:18 = 15:\frac{18.15}{27} = 10$$

Weil aber auch das Verhältniß 27:18 durch 3:2 ausgedrükt werden kann; so würden wir sogleich lieber setzen:

$$3:2 = 3:\frac{2.\ 3}{3} = 2$$

$$3:2 = 9:\frac{2.\ 9}{3} = 6$$

$$3:2 = 15:\frac{2.15}{3} = 10 \text{ u. s. w.}$$

In der Auflösung dieser Aufgabe werden wir künftig die von der Gesellschaftsrechnung erkennen. Und da wir unserm Zwecke gemäß mehrere Eigenschaften der Proporzionen zu wissen nicht benöthigt sind; so schliessen wir hiermit die Abtheilung und gehen zur folgenden, welche eigentlich die Anwendung der bisher in den Proporzionen erkannten Wahrheiten für die Arithmetik enthält.

Sechste

Sechste Abtheilung.

Von denen aus den Eigenschaften der Proporzionen abgeleiteten Rechnungs-Regeln.

§. 133.

Die Bemerkung, daß im gemeinen leben die Maße, Gewichte, Münzen, Zeiten, Arbeiten, Gewinn und Verlust u. s. w. mit einander nach geometrischen Verhältnissen verglichen werden, machte es nothwendig, gewisse Regeln festzusetzen, wornach zu einer beliebigen Menge vorgegebener Größen eine oder mehrere unbekannte bestimmt werden könnten. Da nun eben dieses die lehren der geometrischen Proporzionen leisteten, so war es natürlich, von diesen jene verlangte Regeln abzuleiten, deren vornehmsten wir (zufolge §. 128, 131 und 132.) unter den Namen: der einfachen geraden und ihrer verkehrten Regel Detri, wo zu drei gegebenen Größen eine vierte; der geraden zusammengesetzten und ihrer verkehrten zusammengesetzten Regel Detri, wo zu fünf, sieben ꝛc. Größen, die sechste, achte ꝛc. ꝛc ; und der Gesellschafts-Rechnung, wo zu drei, vier ꝛc. ꝛc. oder auch zu fünf, sieben ꝛc. ꝛc. Größen, noch zwei, drei u. s. w. gefunden werden müssen, angeben; welche Namen sie entweder nach der Menge der gegebenen Größen, oder nach Beschaffenheit der von diesen Größen zu bestimmenden Verhältnisse (welche in Rücksicht auf die mit jenen verbundenen Bedingungen, geradezu oder verkehrt genommen werden) erhalten haben.

Uebrigens bemerken wir zum voraus, daß wir unter den drei letzten Regeln Beispiele antreffen werden, die

die man ausschließungsweise zu besondern Bestimmungen brauchet, wornach sie denn einen besondern Namen erhalten, der jederzeit angezeigt werden soll.

Rechnungsregel der einfachen geraden Regel Detri.

§. 134.

Da hier zu **drei** gegebenen Größen eine **vierte** bestimmt werden soll; so sehen wir zu, welche von ihnen unter einerlei Gesetz gehören, setzen dieselbe, wie sie gegeben werden, **geradezu**, in ein Verhältniß, und machen die dritte, mit der die unbekannte von einerlei Art ist, zum dritten Gliede der Proporzion; hierauf multipliziret man das zweite mit dem dritten, und dividirt das entstandene Produkt mit dem ersten; so giebt (zufolge §. 128.) der Quozient die verlangte Größe.

Erstes Beispiel. **Wieviel betragen 45″ Landmaß nach Baumaß?**

Da hier offenbar die Kenntniß des Verhältnisses vorausgesetzt wird, in welchem die Zolle des Landmaßes, zu den Zollen des Baumaßes stehen; so müssen wir uns erinnern, daß dem 49ten §. zufolge

vom Landmaß 1° = 10′ = 100″ = 1000‴ ꝛc. ꝛc.
und vom Baumaß 1° = 12′ = 144″ = 1728‴ ꝛc. ꝛc. ist.

Weil nun die Ruthen in beiden Maßen gleich sind, so folgt (n. §. 120.), daß das Landmaß sich zum Baumaß wie 1° : 1° = 10′ : 12′ = 100″ : 144″ = 1000‴ : 1728‴ ꝛc. ꝛc. verhalte; mithin können wir von diesen Verhältnissen, das von 100″ : 144″ zur Bestimmung der unbekannten Größe gebrauchen. Und weil wir wahrnehmen, daß von ihm die 100″ mehr als die gegebenen 45 enthalten, so müssen in der zu findenden Größe weniger als 144″ enthalten seyn; weshalb wir setzen:

$$
\begin{array}{r}
100'':45'' = 144 \\
\underline{45} \\
720 \\
\underline{576} \\
100)\,6480|64\tfrac{8}{10} = 64\tfrac{4}{5}\text{ Zoll,}
\end{array}
$$

mithin geben 45″ Landmaß $64\frac{4}{5}''$ Baumaß.

Wollten wir diese gefundene Größe in Fußen und Linien wissen, so müssen wir 64 Zoll durch 12 theilen, und $\frac{4}{5}$ mit 12 multipliziren, weil $1' = 12''$ ist; folglich sind $64'' = \frac{64}{12} = 5', 4''$, und $\frac{4''}{5} = \frac{4 \cdot 12}{5} = \frac{48}{5} = 9\frac{3'''}{5}$, also betragen 45″ Landmaß genau $5'\ 4''\ 9\frac{3'''}{5}$ nach Baumaß.

Hier können wir ein für allemal bemerken, daß man sich unter den **Gliedern des ersten Verhältnisses stets unbenannte Zahlen vorstellen muß**, weil benannte Zahlen **verschiedener Art** nie miteinander multiplizirt werden dürfen (§. 49.); überdem ist offenbar, daß die unbenannten Zahlen ein Verhältniß geben, was dem Verhältniß der benannten gleich ist. So sehen wir, daß in diesem Beispiele 100″ sich zu 45″ genau so, wie 100 zu 45 verhalten.

Ferner, wäre es uns um eine kleine Abkürzung dieser Rechnung zu thun, die wir künftig immer benutzen werden; so könnten wir die Glieder des Verhältnisses 100 : 45 sogleich mit 5, und nachher das erste und dritte Glied mit 2 theilen (§. 130.); mithin setzen:

$$
\begin{array}{l}
5)\underline{100 : 45 = 144'' :} \\
2)\underline{\ 20 : \ 9 = 144'' :} \\
\quad\ 10 : \ 9 = \ 72'' : \frac{9 \cdot 72''}{10} = \frac{648''}{10} = 64\frac{8''}{10}
\end{array}
$$

wie vorhin.

Zwei-

Zweites Beispiel. Wieviel betragen 3° 7′ 6″ Baumaß an Landmaß?

Hier müssen wir erst dieses Maß auf die kleinste Benennung bringen, sodann das erste, zweite und dritte Glied der angesetzten Proporzion so oft mit gleichen Zahlen theilen, als es möglich ist, und zuletzt, wie gewöhnlich, verfahren.

Demnach setzen wir:

```
               144″ : 3° 7′ 6″ = 100″
                  12) 43 . .
                  12) 92 . .
mithin  144       :   522       = 100″
     4)  36      18)   29     4)  25
    18)   2            (5
                      145  }. . .
                       (5
          . . . 2)    725
                      362,5  d. i. 3° 6′ 2″ 5‴ Landmaß.
```

Drittes Beispiel. Wüßte jemand nach angestellten Proben, daß er 2° mit 9 Schritten ablangen könnte, und wollte wissen, wieviel Schritte er auf eine Meile zurück legen müßte? so setzt man, weil 2000° eine Meile bestimmen,

```
        2° : 2000° = 9 Schritt:
oder 2) 1  : 1000  = 9 : 9000
```

demnach würde er 9000 Schritt zurücklegen.

Sollten aber Maße verschiedener Oerter miteinander verglichen werden; so ist nöthig, daß man wisse, wieviel ein bestimmtes Maß des einen Ortes, nach dem Maße des andern betrage?

Gesetzt, daß

106 Breßlauer Fuß	genau	105	Danziger
341 Danziger	= =	318	Königsberger
675 Königsberger	=	682	londner
223 londner	= =	225	Prager
240 Prager	= =	223	Pariser
71 Pariser	= =	72	Wiener rc. rc.

betragen; so können wir schon hiernach, 12 zu dieser Regel gehörige Aufgaben auflösen, von denen wir aber nur zwei anführen wollen.

Viertes Beispiel. **Wieviel bestimmen 15′ 6″ Breßlauer Maß nach Danziger?**

Da bekannt, daß 106′ Breßlauer = 105′ Danziger; so müssen wir setzen:

106′ : 15′ 6″ = 105 Danziger

oder auch 106 : 105 = 15′ 6″

2) 53 . . 12

36

15

186″

2) 93″

105

315

945

53) 9765 | $184\frac{15}{53}$ Danz. Zoll, oder $15' \, 4\frac{15}{53}''$, weil $\frac{184''}{12}$ = 15′ 4″ ist.

446

225

15

Fünftes Beispiel. **Wieviel geben 12′ Königsberger Maß nach Londner?**

Weil 675′ Königsberger = 682′ londner sind; so setzen wir:

3) 675′ : 682′ = 12′ Königsberger:

225 : 682 = 4

4

|2728| $12\frac{28}{225}$ Londner Maß.

478

28

Wären die Gewichte verschiedener Oerter mit einander zu vergleichen, so muß man wissen, wieviel eine bestimmte Anzahl Pfunde eines Orts an Pfunden eines andern enthalte? Gesetzt also, daß 100 ℔ Berliner, sowohl $100\frac{3}{8}$ ℔ Braunschweiger, als $107\frac{5}{8}$ ℔ Danziger, $115\frac{5}{8}$ ℔ Breßlauer, 148 ℔ Kaßler, $100\frac{1}{4}$ ℔ Köllner, 110 ℔ Londner, $99\frac{1}{4}$ ℔ Leipziger, $124\frac{1}{16}$ ℔ Warschauer rc. rc. enthalten; so sehen wir, daß alle diese Gewichte unter sich gleiche Verhältnisse angeben, weil sie 100 ℔ Berliner bestimmen. Von diesen Oertern mag demnach jede beliebige Menge Gewichte gegeben werden, so können wir sie immer geradezu durcheinander bestimmen, wie folgende Beispiele zeigen.

Sechstes Beispiel. **Wieviel Breßlauer Gewicht betragen 8 Ctr. 46 ℔ Berliner Gewicht?**

Da 100 ℔ Berliner = $115\frac{5}{8}$ ℔ Breßlauer ist, so können wir setzen:

100 ℔ Berl. : 8 Ctr. 46 ℔ Berl. = $115\frac{5}{8}$ ℔ Breßl.:

110

oder 100 : 926 = $\frac{925}{8}$

und indem wir das erste und dritte Glied mit 8 multipliziren

$$
\begin{array}{l}
5)\underline{800 : 926 = 925 \text{ ℔}} \\
5)\underline{160 : 926 = 185} \\
2)\underline{32 : 926 = 37} \\
\quad 16 : 463 = 37 \\
\qquad\quad \underline{37} \\
\qquad 3241 \\
\quad\ \underline{1389} \\
16)17131 \mid 1070|9 \text{ Ct. } 80 \text{ ℔ } 22 \text{ L. Breßl.} \\
\quad\ \underline{113} \mid \underline{80} \\
\qquad \frac{11}{16} = 22 \text{ Loth.}
\end{array}
$$

Siebentes Beispiel. Was machen 48 ℔ Breßlauer nach Leipziger Gewicht?

Da $115\frac{5}{8}$ ℔ Breßlauer = $99\frac{1}{4}$ ℔ Leipziger sind, so setzen wir:

$$115\frac{5}{8} \text{ ℔} : 48 \text{ ℔} = 99\frac{1}{4} \text{ ℔ Leipziger}:$$

$$\text{oder } \frac{925}{8} : 48 = \frac{397}{4} \text{ ℔}$$

multipliziren wir nun das erste und dritte mit 4, und nachher das zweite und erste mit 2; so folgt:

$$
\begin{array}{l}
925 : 96 = 397 \text{ ℔ Leipziger} \\
\qquad\qquad\quad \underline{96} \\
\qquad\qquad 2382 \\
\qquad\quad\ \underline{3573} \\
925)\ 38112 \mid 41\frac{187}{925} \text{ Leipziger.} \\
\qquad\quad \underline{1112} \\
\qquad\qquad 187
\end{array}
$$

Wären endlich verschiedene Münzsorten gegen einander zu bestimmen, so muß angegeben werden: wieviel Stück einer Sorte eine bestimmte Menge der andern Sorte enthalte? Es sey also bekannt, daß

3 Thl. = 1 Dukaten, 16 Dukaten = 9 Fr.d'or, 5 Fr.d'or = 4 Karolinen, 27 Karolinen = 40 Souverains, 62 Souverains = 45 Güneen sind, nach welchen Größen 10 Aufgaben aufgelöset werden können.

Achtes Beispiel. **Wieviel Thl. geben 7512 Dukaten?**

Da 1 Duk. = 3 Thl. ist, so setzen wir:

1 Duk. : 7512 Duk. = 3 Thl.;

oder 1 " : 7512 " = 3 : 7512 . 3 = 21536 Thl.

Neuntes Beispiel. **Wieviel Fr.d'or muß man für 1000 Dukaten empfangen?**

Weil 16 Duk. = 9 Fr.d'or betragen, so kann man setzen:

$$8)\frac{16\text{ Duk.} : 1000\text{ Duk.} = 9\text{ Fr.d'or}:}{2 \quad : \quad 125 \quad = 9}$$

$$\frac{125}{1125}(9 \qquad 2)\frac{1125}{562\tfrac{1}{2}\text{ Fr.d'or.}}$$

Alle bisherige Beispiele enthielten immer Größen ähnlicher Art, und die durch diese Regel erlangten Vortheile würden offenbar sehr geringe seyn, wenn wir nicht mehrere durch die Bemerkung kennen lernten: **daß im Handel nach Maß und Gewicht gegebene Waaren mit ihren Preisen; bei Arbeiten, die Arbeiter mit den zu verfertigten Arbeiten ꝛc. ꝛc. in gleichen Verhältnissen fortschreiten**, also daß man für zwei, drei, vier ꝛc. mal soviel Waare, zwei, drei, vier ꝛc. mal soviel Geld geben, oder andere Waare vertauschen; und mit zwei, drei, vier ꝛc. mal soviel Arbeiter, eine zwei, drei, vier ꝛc. mal so große Arbeit ꝛc. verfertiget erhalten muß; und so umgekehrt, wie folgende Beispiele lehren.

Zehntes Beispiel. **Wenn 1 Elle Leinewand zu 8 Gr. 4 Pf. bezahlt wird, wieviel muß ein Stück derselben, oder 60 Ellen kosten?**

Da hier offenbar 60 Ellen mehr kosten müssen, als 1 Elle; so setzen wir:

$$1 \text{ Elle} : 60 \text{ Ellen} = \frac{8 \text{ Gr. } 4 \text{ Pf.}}{20 \text{ Thl. } 20 \text{ Gr. } \text{ : Pf.}} (60$$

und sprechen: 60mal 4 Pf. geben soviel als 60mal $\frac{1}{3}$ Gr. oder den 3ten Theil von 60 Gr., d. h. 20 Gr.; ferner 60mal 8 Gr. geben 60mal $\frac{1}{3}$ Thl. oder $\frac{1}{3}$ von 60 Thl., d. h. 20 Thl.; mithin kostet das Stück 20 Thl. 20 Gr.

Eilftes Beispiel. **Was kostet der Centner Pulver, davon das Pfund für 6 Gr. 6 Pf. geliefert wird?**

Da 1 Ctr. 110 ℔, 6 Gr. = $\frac{1}{4}$ Thl. und 6 Pf. = $\frac{1}{2}$ Gr., so setzt man:

$$1 \text{ ℔} : 110 \text{ ℔} = \frac{\frac{1}{4} \text{ Thl.} + \frac{1}{2} \text{ Gr.}}{\begin{array}{l} 2 \text{ : } + 7 \text{ :} \\ 27 \text{ : } + 12 \text{ :} \\ \hline 29 \text{ Thl.} + 19 \text{ Gr.} \end{array}} (110$$

und spricht: $\frac{1}{2}$ Gr.. 110 = $\frac{1}{2}$. 110 Gr. = 55 Gr. = 2 Thl. 7 Gr.; und $\frac{1}{4}$ Thl.. 110 = $\frac{1}{4}$. 110 Thl. = $27\frac{1}{2}$ Thl. = 27 Thl. 12 Gr., zu welchen vorige 2 Thl. 7 Gr. genommen, 29 Thl. 19 Gr. bestimmen.

Zwölftes Beispiel. **Wieviel Papier hat man zu 100000 Patronen nöthig, wenn 1 Bogen zu 12 Patronen erforderlich ist?**

$$4)\frac{12 \text{ Patronen} : 100000}{3 \cdot \quad \ldots\ldots 3)\frac{25000}{8333\frac{1}{3}}} \text{ Patronen} = 1 \text{ Bogen}$$

$8333\frac{1}{3}$, und in gerader Zahl braucht man 8334 Bogen zu 100000 Patronen.

Weil aber auch 24 Bogen = 1 Buch, 20 Buch = 1 Rieß, und 10 Rieß = 1 Ballen (n. §. 19.); so theilen wir erst mit 24, dann mit 20, und endlich mit 10: mithin

$$24 = \begin{cases} 3) \\ 8) \end{cases} \begin{array}{ll} \underline{8334 \text{ Bogen}} & \\ \underline{2778 \ldots\ldots} & 6 \text{ Bogen} \\ 20)\underline{347 \text{ Buch.}} & 7 \text{ Buch} \\ 10)\underline{17 \text{ Rieß}} & 7 \text{ Rieß} \\ 1 \text{ Ballen}; & \end{array}$$

folglich sind 8334 Bogen soviel als 1 Ballen, 7 Rieß 7 Buch 6 Bogen.

Wollten

Wollten wir auch die Kosten des Papiers wissen, wenn man jedes Buch zu 1 Gr. 3 Pf. bezahlte; so würden wir auf ähnliche Art finden, daß man 18 Thlr. 2 Gr. dafür erlegen müßte.

Und füllete man jede Patrone mit 2 Loth Pulver, so müßten zu 100000 Patronen 56 Centner 90 ℔ gutgethan werden.

Dreizehntes Beispiel. **Wenn 12 Arbeiter in 6 Stunden 2000 Patronen verfertigen können, wieviel Arbeiter sind erforderlich, die in eben der Zeit 100000 Patronen verfertigen?**

Weil hier eine größere Arbeit gegeben wird, so müssen auch mehrere Mannschaften genommen werden; mithin setzen wir:

$$2000)\,\frac{2000\text{ Ptr.} : 100000\text{ Ptr.} = 12\text{ Arb.} :}{1 \quad : \quad 50 \quad = 12 \quad : 50.12 = 600}$$

Arbeiter; also verfertigen 600 Arbeiter in 6 Stunden 100000 Patronen.

Wie man umgekehrt die Größe der Arbeit, oder die Menge Tage bestimmen müsse, wenn die Menge Arbeiter, oder die Größe der Arbeit gegeben wären, ist leicht einzusehen, weshalb wir dergleichen Aufgaben übergehen.

Rechnungs-Regel der einfachen verkehrten Regel Detri.

§. 135.

Da auch hier zu drei bekannten Größen eine einige unbekannte bestimmt werden soll, so müssen wir die gegebenen ähnlichen Größen nicht geradezu, sondern vielmehr umgekehrt, oder verkehrt in Verhältniß setzen, welches jederzeit daran zu erkennen ist, daß man nach den Bedingungen, die mit den gegebenen Größen verbunden sind, urtheilen muß, daß die vierte zu bestim-

stimmende, sich zur dritten, wie die erste zur zweiten verhalte. Uebrigens verfährt man in der Rechnung wie bisher, welches nachstehende Beispiele zu erkennen geben.

Erstes Beispiel. **Wieviel betragen 15′ 6″ Breßlauer Maß nach Londner?**

Diese und andere Aufgaben würden unauflöslich bleiben müssen, wenn nicht die Maße von verschiedenen Oertern nach einem einigen verglichen, und in Tabellen, die in verschiedenen mathematischen Büchern angezeigt sind, gebracht wären. In ihnen findet man nun den Pariser Fuß (Pied du Roi) (der auch zu Haag angenommen ist) in 144 Linien getheilet, und nach denselben die Größe eines jeden andern Fußes ausgemessen, daß es demnach gleichviel gilt, ob man diese Fuße, oder ihre bestimmte Menge Pariser Linien in Vergleichung setzet. Um also dieses zeigen zu können, geben wir folgende kleine Tabelle an, welche das Maß der vornehmsten Oerter enthält.

Vergleichungen der Maße verschiedener Oerter nach dem in 144 Linien getheilten Pariser Fuße.

Der Fuß von Augsburg hat	131,3‴	der von Paris hat	144,‴
: : : Berlin :	137,3	: : Prag :	133,8
: : : Braunschweig	126,5	: : Rheinland	139,13 c.
: : : Breßlau :	126,	: : Rußland :	238,6
: : : Krakau :	158,	: : Schweden	136,6
: : : Danzig :	127,2	: : Strasburg	128,3
: : : Dresden :	125,5 a.	: : Turin :	143,2
: : : Hannover :	129,5 b.	: : Ulm :	128,1
: : : Königsberg :	136,4	: : Wien :	142,
: : : Nürnberg :	134,7	: : Wittenberg	148,5
		Zürch :	133 1.

a. Dem ist der Leipziger, b. dem der Kalenberger und Pommerische, c. dem der Kopenhagner gleich.

Die

Die vorgegebene Aufgabe nun aufzulösen, nehmen wir aus dieser Tabelle die Theile des Breßlauer und londner Fußes, von welchen der erstere 126, der letztere aber 135 enthält, und schließen: da 126 Theile weniger als 135 Theile sind, so muß der Breßlauer Fuß kleiner als der londner, und mithin jede beliebige Menge Fuße des erstern Ortes, eine kleinere Anzahl des letztern geben; weil aber diese Menge Theile, nach dem Namen der Oerter in Verhältniß gesetzt, zum vierten Proporzional Gliede eine größere Menge londner Fuße, als 15′ 6″ Breslauer bestimmen würde, so müssen wir das Verhältniß umkehren, damit eine kleinere Anzahl entstehen kann, und mithin setzen:

$$9)\ 135 : 126 = 15' \, 6'' \text{ Breßlauer}$$
$$3)\ 15 : 14 = 186'' \ (12 \text{ Breßlauer} : 173\tfrac{3}{5} \text{ londner Zoll}$$
$$5 : 14 = 62$$
$$\begin{array}{r} 62 \\ 14 \\ \hline 248 \\ 62 \\ \hline 5)\,868 \end{array} \Big| \ 173\tfrac{3}{5}'' \text{ londner Zoll.}$$
$$\tfrac{3}{5}$$

Nehmen wir nun an, daß der londner Fuß 12 Zoll enthält; so geben $173\frac{3}{5}''$ offenbar $\frac{173\frac{3}{5}}{12} = 14' \, 5\frac{3}{5}''$.

Um auf eine noch deutlichere Art einzusehen, daß in der Proporzion das Verhältniß der Theile nicht anders genommen werden konnte, dürfen wir uns nur die Frage: **wie verhält sich das Breßlauer Maß zum Londner?** vorlegen, und folgendermaßen schliessen: da 1′ Breßlauer = 126‴, und 1′ londner = 135‴, so folgt:

1 Breßlauer : 1 londner = 126 : 135

Weil nun in einer Proporzion das Produkt der äussern Glieder dem Produkt der mittlern gleich seyn muß, (§. 126.)

(§. 126.) so erhellet, daß 135' Breßlauer = 126' londner sind, mithin müssen wir nur nach dem Verhältnisse 135 : 126 eine gewisse Menge vom Breßlauer Maß nach dem londner erhalten, wie im vorigen Beispiel zu ersehen. Auf gleiche Art sind aus diesen Vergleichungen diejenigen entstanden, die vor obigem vierten Beispiele angegeben sind (§. 134.) nach welchen aber diese Aufgabe nicht aufgelöset werden könnte.

Zweites Beispiel. **Wieviel betragen 6 Berliner Fuß nach Rheinländischem Maß?**

Da 1 Berliner Fuß = 137,30''', und 1 Rheinländischer = 139,13'''; so sind nach voriger Anmerkung 13730 Rheinländische Fuß = 13913 Berliner Fuß. Wir müssen also hier, wie vorher, und so in andern ähnlichen Beispielen, die Menge der Theile **nicht geradezu, sondern umgekehrt** nehmen, und setzen:

13913 : 13730 = 6' Berliner
6
13913) 82380 | 5' 11 $\frac{737''}{13913}$ Rheinl. Maß.
12815
25630 (12
13813) 153780 | 11''
14650
737

Weil wir jetzt die Vergleichungs-Tabelle bei diesen Aufgaben zu gebrauchen wissen, so halten wir uns mit ihnen nicht länger auf; sondern führen folgende Vergleichungen der Münzsorten an, um von ihnen einen ähnlichen Gebrauch zu machen.

Vergleichung einiger Goldmünzen nach Thaler, wie sie hier zu Lande den Werth haben.

1 Fr.d'or	gilt $5\frac{1}{3}$ Thl.	1 Souverän	gilt $4\frac{1}{2}$ Thl.
1 Dukaten	= 3 =	1 Imperial	= $12\frac{1}{2}$ =
1 Karolin	= $6\frac{2}{3}$ =	1 Günee	= 6 = 4 Gr. 5 Pf. oder $6\frac{1}{5}$ Thl.

Drit=

Drittes Beispiel. **Wieviel Souverains erhält man für 200 Dukaten?**

Da 1 Souverain = $4\frac{1}{2}$ Thl. und 1 Dukaten = 3 Thl.; so ist klar, daß man weniger Souverains erhalten muß, als Dukaten gegeben sind; weil nun aber die Menge Thaler, nach dem Namen dieser Geldsorten in Verhältniß gebracht, für die Dukaten eine größere Menge Souverains geben würde, so müssen wir es umkehren, und setzen:

$4\frac{1}{2}$ Thl. : 3 Thl. = 200 Dukaten
oder 9 „ : 6 „ = 200 „
oder 3 „ : 2 „ = $200 : \frac{2 \cdot 200}{3} = 133\frac{1}{3}$ Souver.

Da auch hier eben die beim zweiten Beispiel gemachte Bemerkung statt findet, so geben wir nicht mehrere, und erinnern, daß man mit ähnlichen Aufgaben für Gewichte, deren Vergleichungen bekannt sind, auf angezeigte Art verfahren muß.

Viertes Beispiel. **Wenn 50 Arbeiter in 6 Stunden 8000 Patronen verfertigen können, wieviel Zeit werden dazu 30 Arbeiter nöthig haben?**

Wir nehmen hier wahr, daß von einer und eben derselben Arbeit gesprochen wird, weshalb wir sie nicht in Betrachtung nehmen, sondern vielmehr darauf denken, wie das Verhältniß der Arbeiter anzusehen ist. Da nun offenbar ist, daß weniger Arbeiter weniger arbeiten, so müssen wir ihnen mehrere Zeit geben, weil sie eben soviel arbeiten sollen; demnach muß das Verhältniß der Arbeiter nicht geradezu, sondern umgekehrt genommen, und gesetzet werden:

30 Arbeiter : 50 Arbeiter = 6 Stunden
oder 3 „ : 5 „ = $6 : \frac{5 \cdot 6}{3} = 10$ St.

also endigen 30 Arbeiter in 10 Stunden eben soviel Arbeit, als 50 Arbeiter in 6 Stunden.

Fünf=

Fünftes Beispiel. Es sey bekannt, daß 100 Arbeiter in 8 Tagen eine bestimmte Arbeit zu Ende bringen können, gewisse Umstände erforderten aber, daß sie in 2 Tagen beendigt seyn solle, wieviel Arbeiter wird man anstellen müssen?

Da in weniger Zeit von einer gleichen Menge Arbeiter, weniger gethan werden kann, so muß man in dieser Zeit, zu eben derselben Arbeit, mehrere Arbeiter anstellen, und also das Verhältniß der Zeiten umgekehrt setzen; als

$$2 \text{ Tage} : 8 \text{ Tage} = 100 \text{ Arbeiter}$$
$$\text{oder } 1 : 4 \text{ „} = 100 : 400 \text{ Arbeiter.}$$

Sechstes Beispiel. Eine Kompagnie bedarf 600 Ellen Tuch zu ihrer Mondirung, das $1\frac{1}{2}$ Elle breit liegt, man will wissen, wieviel Boy zu ihrem Unterfutter gehöret, der nur $\frac{7}{8}$ Elle breit ist?

Weil offenbar bei der geringern Breite des Boy mehr Ellen erfordert werden, so müssen wir hier das Verhältniß der Breiten umkehren; und also setzen:

$$\frac{7}{8} : 1\frac{1}{2} = 600 \text{ Ellen}$$
$$\text{oder } \frac{7}{8} : \frac{3}{2} = 600 \text{ Ellen}$$
$$7 : 12 = 600 : \frac{12.600}{7} = \frac{7200}{7} = 1028\frac{4}{7} \text{ Ellen Boy.}$$

Siebentes Beispiel. Es sey ein Soldat vor 6 Stunden desertirt, und habe bis zur Grenze 13 Meilen, auf deren jede er 2 Stunden Zeit bedarf; man frägt, wieviel Zeit ein zum Nachsetzen Kommandirter zu jeder Meile nehmen müsse, um den Deserteur eine Meile vor der Grenze einzuholen?

So verwickelt diese Aufgabe zu seyn scheint, so leicht ist sie aufzulösen, wenn wir, um die aus den Bedingungen herzuleitenden, und in Proporzionen zu setzenden Größen zu erhalten, folgendermaßen schließen. Da der Deserteur zu jeder Meile 2 Stunden Zeit bedarf, so ist klar, daß er schon in den 6 Stunden 3 Meilen zurückgelegt

legt hat, folglich bis zur Grenze noch 10 Meilen, und bis zu dem Orte, wo ihn der Kommandirte antreffen soll, nur noch 9 Meilen vor sich hat. Ferner, weil der Kommandirte nicht alle 13 Meilen, sondern nur 12 Meilen bis zu dem Orte vor der Grenze zurück zu legen hat, so muß er diese in eben der Zeit, als der Deserteur seine 9 Meilen zu erreichen suchen. Es sind nun die Wege von ungleicher Länge, also muß der Kommandirte auf jede Meile weniger Zeit, als der Deserteur zubringen, und mithin das Verhältniß der Meilen umgekehrt gesetzt werden; als:

12 Meilen : 9 Meilen = 2 Stunden Zeit zu 1 Meile des Deserteur

oder 4 " : 3 " = $2 : \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$ Stunde Zeit des Kommandirten.

Rechnungsregel der geraden zusammengesetzten Regel Detri.

§. 136.

Da hier zu fünf oder sieben rc. gegebenen Größen, eine einige unbekannte bestimmt werden soll, so nimmt man zwei und zwei gleichartige Größen ins Verhältniß geradezu, wie sie angegeben sind, setzet sie untereinander, machet von ihnen das zusammengesetzte Verhältniß, und setzet neben diesem die einzelne Größe, die mit keiner andern verglichen werden konnte, als drittes Glied; hierauf multiplizirt man das zweite Glied mit dem dritten, und dividirt das entstehende Produkt durch das erste, so giebt der Quozient die verlangte unbekannte Größe.

Erstes Beispiel. Es sey bekannt, daß 8 Mann in 6 Tagen 144 Schachtruthen ausgraben können, wieviel Schachtruthen werden 12 Mann in 3 Tagen ausgraben, wenn sie mit gleichem Fleiß arbeiten?

In diesem Beispiele erhalten wir also das eine Verhältniß von den Mannschaften, und das andere von der Zeit,

Zeit, welche beide geradezu genommen werden können; weil wir schließen dürfen: je mehr Mannschaften vorhanden sind, je mehr Arbeit kann gethan werden; also geben sie das Verhältniß 8 Mann: 12 Mann; ferner, da in einer kleinern Zeit weniger gethan werden kann, als in einer größern; so folgt, daß bei diesen das Verhältniß 6 Tage: 3 Tage statt findet; mithin setzen wir:

$$\left\{\begin{matrix} 8\text{ M.} : 12\text{ M.} \\ 6\text{ T.} : 3\text{ T.} \end{matrix}\right\}$$

$$\not{6}.8 \quad : \quad 3.\not{12} = 144 \text{ Schachtruthen}$$

$$\qquad\qquad\qquad 2$$

2.6) ―――――――――――――――

oder $4 \quad : \quad 3 \quad = 144 : \frac{3 \cdot 144}{4} = 108$ Schachtruthen; demnach graben 12 Mann in 3 Tagen 108 Schachtruthen aus.

Eben diese bestimmte 108 Schachtruthen werden gefunden, wenn wir zwei Rechnungen nach der einfachen geraden Regel Detri anstellen, indem wir schließen: da 8 Mann und 12 Mann gleiche Zeit arbeiten, so müssen letztere mehr als 144 Schachtruthen ausgraben; mithin folgt (n. §. 134.)

8) $\dfrac{8 \text{ Mann} : 12 \text{ Mann} = 144 \text{ Schachtruthen}}{1 \quad : 12 \quad = 18 \text{ Schachtruthen} : 12 . 18}$ Schachtruthen.

Ferner: da in einer kleinern Zeit die 12 Mann weniger, als in einer größern, ausgraben können, so folgt,

3) $\dfrac{6 \text{ Tage} : 3 \text{ Tage} = 12.18 \text{ Schachtruthen} :}{2 \quad : 1 \quad = 12.18 \text{ Schachtruthen} : \frac{12 . 18}{2}}$

$= 108$ Schachtruthen.

Vergleichen wir nun die Glieder dieser beiden Proporzionen gegen einander; so sehen wir, daß das vierte

Glied

Glied der ersten, sich mit dem dritten der zweiten aufhebt, dadurch eben obiger Ansatz erhellet, dessen Richtigkeit (zufolge §. 131.) einleuchtend ist.

Zweites Beispiel. Jemand hat ein Stück Tuch von 6 Ellen Länge und $1\frac{1}{2}$ Elle Breite für 18 Thl. gekauft, und will noch ein anderes von gleicher Güte mit dem vorigen Preise verhältnißmäßig bezahlen, das 4 Ellen lang und 2 Ellen breit ist; was wird er dafür geben müssen?

Hier können wir gleich schließen: je weniger Länge das Tuch hat, je weniger darf er bezahlen; hingegen auch, je breiter es ist, desto mehr ist es werth, mithin muß man setzen

{6 Ellen : 4 Ellen Länge
{$1\frac{1}{2}$ Elle : 2 " Breite}

9) 9 : 8 " 18 Thl.
1 : 8 " 2 Thl. : 2 . 8 = 16 Thl. muß er bezahlen.

Drittes Beispiel. Man weiß, daß 4000 Thl. zu 5 pro Cent ausgethan, in 4 Jahren 800 Thl. Interesse geben, und man frägt: wieviel kann man von 60000 Thl. in 3 Jahren erhalten?

Je größer das Kapital, um so mehr Interessen hat man zu fordern; und je kürzere Zeit es steht, desto weniger muß man erwarten; folglich wird gesetzt:

{4000 Thl. : 60000 Thl.
{4 Jahr : 3 Jahr}

1000 . 4) ~~4000~~ . 4 : ~~60000~~ . 3 = 800 Thl. Interesse
4) 4 : 15 . 3 = 800 Thl. Interesse
1 : 15 . 3 = 200 : 200 . 45 = 9000 Thl. Interesse.

Mithin geben 60000 Thl. in 3 Jahren 9000 Thl. Interesse.

Hier

Hier war nicht nothwendig, anzuzeigen; auf wieviel pro Cent das Kapital ausgethan war (unter welchem Ausdruck immer verstanden wird, wieviel Interesse man von 100 Thl. in einem Jahre erhält) weil sie selbst nicht mit in Rechnung gesetzt werden durften.

Uebrigens bemerken wir noch, daß diese und andere ähnliche Rechnungen, die im gemeinen Leben unendlich oft vorkommen, den Namen der Intereßrechnung erhalten haben.

Viertes Beispiel. **Wieviel geben 15′ 6″ Breslauer Maß nach Londner, wenn**

106 Breslauer Fuß 105 Danziger
341 Danziger „ 318 Königsberger
675 Königsberger „ 682 Londner enthalten?

Diese Aufgabe aufzulösen, (die wir im vorigen §. vermittelst anderer Vergleichungen geradezu auflöseten) setzen wir die gegebene Gleichungen als Verhältnisse untereinander, bestimmen von ihnen das zusammengesetzte Verhältniß, und verfahren nach gewöhnlicher Art. Also

$$\left\{\begin{array}{ll} 106 \text{ Breslauer} & : 105 \text{ Danziger} \\ 341 \text{ Danziger} & : 318 \text{ Königsberger} \\ 675 \text{ Königsberger} & : 682 \text{ Londner} \end{array}\right\}$$

$$15.341.106) \; \underline{106.341.675 : 105.318.682 = 15'6'' \text{ oder } 186''}$$

$$3) \; \underline{1 \,.\, 1 \,.\, 45 : 7 \,.\, 3 \,.\, 2 = 186''}$$

$$3) \; \underline{15 : 7 \,.\, 1 \,.\, 2 = 186''}$$

$$5 : 7 \,.\, 1 \,.\, 2 = 62 : \frac{7.2.62}{5} = 173\tfrac{3}{5}$$

Londner.

Wir bekommen demnach ebendieselbe Größe, die wir oben gefunden hatten, (v. §. 18 Beisp.) und mußten sie erhalten, weil wir den vorhandenen Gleichungen und der gegebenen Größe zufolge, eben soviele einzelne Proporzionen nach und nach setzen konnten, von welchen die letzte nothwendig diese erlangte Größe bestimmt.

stimmt. Wollten wir sie auf diese Art suchen, so setzten wir

a. 106 Breßl. : 105 Danz. = 186″ Breßl. : $\frac{105.186}{106}$ Danzig.

b. 341 Danz. : 318 Könb. = $\frac{105.186}{106}$ Danz. : $\frac{318.105.186}{341.106}$ K.

c. 675 Könb. : 682 Londn. = $\frac{318.105.186}{341.106}$ Könb. : $\frac{682.318.105.186}{675.341.106}$ Londner.

Es sind folglich 186″ Breßlauer = $\frac{105.186}{106}$ Danziger = $\frac{318.105.186}{341.106}$ Königsberger = $\frac{682.318.105.186}{675.341.106}$ Londner; welcher Ausdruck genau eben das anzeigt, was die Glieder des zusammengesetzten Verhältnisses, mit der einzelnen Größe in dem berechneten Beispiele thun.

Hier ist zu bemerken, daß die Regel bei diesen und ähnlichen Beispielen den Namen der **Kettenregel** erhält, weil die untereinander gesetzten Verhältnisse gleichsam eine Kette dadurch formiren, daß der Name eines zweiten Gliedes jedes Verhältnisses bei dem ersten des unmittelbar folgenden wiederum vorkömmt.

Fünftes Beispiel. **Wieviel Souverains müssen für 200 Dukaten gegeben werden, wann 16 Dukaten = 9 Fr.d'or, 5 Fr.d'or = 4 Karolinen, und 27 Karolinen = 40 Souverains sind?**

Dieses Beispiel ist eben das dritte des vorigen §, weshalb wir eben dieselbe Größe erhalten müssen, wenn wir wie vorher verfahren. Wir setzen demnach:

$$\left\{\begin{array}{ll} 16\text{ Duk.} : & 9\text{ Fr.d'or} \\ 5\text{ Fr.d'or} : & 4\text{ Karol.} \\ 27\text{ Karol.} : & 40\text{ Souv.} \end{array}\right\}$$

$$\not{1}\not{6}.5.\not{2}\not{7} : \not{9}.4.4\not{0} = 200\text{ Duk.} : \frac{2.200}{3} = 133\tfrac{1}{3}\text{ Souverains, wie oben.}$$

$$4.3 \quad : \quad 8 \;\; 2$$

 Rech-

Rechnungsregel der verkehrten zusammengesetzten Regel Detri.

§. 137.

Da auch hier zu fünf, sieben rc. gegebenen Grössen eine einige gefunden werden soll, so nimmt man von ihnen ebenfalls zwei und zwei gleichartige Grössen, theils geradezu, theils umgekehrt in Verhältniß, je nachdem es die mit ihnen verbundenen Bedingungen verlangen; machet sodann von ihnen das zusammengesetzte Verhältniß, und folgt im übrigen der vorigen Regel.

Erstes Beispiel. Wenn 36 Arbeiter in 6 Tagen 648 Schachtruthen ausgraben, wieviel Zeit müssen 48 Arbeiter gebrauchen, die mit gleicher Thätigkeit 846 Schachtruthen ausgraben wollen?

Weil von der Zeit die Frage ist, so müssen wir bei Bestimmung der Verhältnisse blos auf sie Rücksicht nehmen, und sprechen: da mehr Schachtruthen gegraben werden sollen, so erfordern dieselben mehr Zeit, mithin muß das Verhältniß der Schachtruthen geradezu genommen werden, also 648 : 846; weil hingegen auch desto weniger Zeit erforderlich ist, je mehr Arbeiter gegeben werden; so folgt, daß das Verhältniß der Arbeiter umgekehrt, also 48 : 36 zu nehmen ist; mithin setzen wir:

{ 648 Schachtr. : 846 Schachtr. }
{ 48 Arbeiter : 36 Arbeiter }

6) 648 . 48 : 846 . 36 = 6 Tage:
9) 648 . 8 : 846 . 36 = 1
36) 72 . 8 : 94 . 36 = 1

2 . 8 : 94 . 1 = 1 : $\frac{94}{16}$ = $5\frac{1}{4}$ Tag müssen also 48 Arbeiter an 846 Schachtruthen arbeiten.

Zweites Beispiel. Es sey bekannt, daß ein Kommando, um einen Marsch von 30 Meilen zurückzulegen, 10 Tage gebraucht, wenn es täglich 7 Stunden marschirt; nun werde gefragt: wieviel Tage hat es nöthig, einen Weg von 20 Meilen zu machen, wenn es täglich mit voriger Geschwindigkeit 10 Stunden marschirt?

Da blos die Tage in Anschlag kommen, so können wir schließen: weil 20 Meilen weniger erfordern als 30 Meilen, so muß deren Verhältniß geradezu genommen werden; weil man aber auch weniger braucht, wenn täglich 10 Stunden, statt 7 Stunden marschirt wird, so muß man das Verhältniß der letztern verkehrt nehmen, und mithin setzen:

$$\left.\begin{cases} 30 \text{ Meilen} : 20 \text{ Meilen} \\ 10 \text{ Stunden} : 7 \text{ Stunden} \end{cases}\right\}$$

$$10)\overline{30.10 : 20.7 = 10 \text{ Tage}}$$

$$3\not{0} : 2\not{0}.7 = 1 : \frac{2.7}{3} = 4\tfrac{2}{3} \text{ Tage.}$$

Diese sind demnach erforderlich, d. h. am 5ten Tage wird das Kommando im Orte der Bestimmung anlangen.

Drittes Beispiel. Von einem bestimmten Proviantvorrath können 6000 Mann 4 Monath zehren, wenn ein jeder täglich 1 ℔ 4 Loth Brod erhält; wieviel kann jedem Mann eines Korps von 5000 Mann täglich gereicht werden, wenn dieser Proviantvorrath 6 Monath lang dauren soll?

Da hier von gleichem Proviantvorrath die Rede ist, so muß jedem Mann des Korps von 5000 Mann mehr gereicht werden können, daher wir das Verhältniß 5000 M. : 6000 M. erhalten; weil aber desto weniger ausgegeben werden darf, je länger man davon leben soll; so müssen wir auch das Verhältniß der Zeiten verkehrt nehmen; demnach setzen wir:

$$\left\{\begin{matrix} 5000\ \text{Mann} : 6000\ \text{Mann} \\ 6\ \text{Mon.} : 4\ \text{Mon.} \end{matrix}\right\}$$

$$6.1000)\frac{5000.6 \quad : 6000.4 = 1\ \text{℔}\ 4\ \text{Loth}}{5 \quad : \quad 4 \quad = 36\ \text{L.} : \frac{4.36}{5} = 28\tfrac{4}{5}\ \text{L.}}$$

Viertes Beispiel. 125 Soldaten können mit 8000 Thl. 1 Jahr lang besoldet werden, wielange wird man 2150 Soldaten mit 309600 Thl. auf gleiche Art besolden können?

$$\left\{\begin{matrix} 2150\ \text{Soldaten} : 125\ \text{Soldaten} \\ 8000\ \text{Thl.} : 309600\ \text{Thl.} \end{matrix}\right\}$$

$$8.100)\frac{2150.80\not{0}\not{0} \quad : 125.3096\not{0}\not{0} = 1\ \text{Jahr}}{21500 \quad : \quad 125.387 \quad = 1\ \text{Jahr}}$$

$$125)\frac{21500}{172} \quad : \quad 387 \; \Big| \; 2\tfrac{43}{172} = 2\tfrac{1}{4}\ \text{Jahr.}$$

$$\begin{array}{r} 387 \\ 344 \\ \hline 43 \end{array}$$

Fünftes Beispiel. Für eine gewisse Fracht von 100 Centner Pulver bezahlet man auf 20 Meilen 400 Thl.; wieviel Centner wird man nach gleicher Bedingung für 500 Thl. auf 10 Meilen fahren müssen?

$$\left\{\begin{matrix} 400\ \text{Thl.} : 500\ \text{Thl.} \\ 10\ \text{M.} : 20\ \text{M.} \end{matrix}\right\}$$

$$2.1000)\frac{4\not{0}\not{0}\not{0} \quad : 10\not{0}\not{0}\not{0} = 100\ \text{Centner}}{2 \quad : \quad 5 \quad = \frac{100}{500}(5}$$

$$2)\frac{500}{250\ \text{Centner.}}$$

Regel für die Gesellschaftsrechnung.

§. 138.

Da hier zu drei, vier ꝛc. gegebenen Größen, noch zwei, drei ꝛc. unbekannte gefunden werden sollen, so ma-

chet

chet man von den Zahlen, nach welchen die dritte oder vierte ꝛc. verhältnißmäßig getheilet werden muß, eine Summe, und schließet: wie sich die Summe zu der gegebenen dritten, oder vierten ꝛc. zu theilenden Zahl verhält, so verhält sich der erste, zweite ꝛc. Theil der Summe zu dem ersten, zweiten ꝛc. unbekannten Theile der zu theilenden Zahl, wie solches nach dem 132sten §. einleuchtend ist.

Erstes Beispiel. **Drei Personen vereinigten sich zu einem Handel, nach welchem die erste 2500 Thl. die zweite 3700 Thl., die dritte 5800 Thl. hergab; nach einer gewissen Zeit gewannen sie mit ihrem Gelde 50000 Thl.; es wird gefragt: wieviel jede von diesem Gewinnst erhalten muß?**

Hier sehen wir sogleich, daß nicht jede gleichviel erhalten kann, sondern daß die Theilung nach dem Verhältniß ihres Beitrags geschehen muß; weshalb wir der gegebenen Regel folgen, und setzen:

Die erste	Person gab	2500 Thl.	
" zweite	" "	3700 "	
" dritte	" "	5800 "	
sämtliche	Personen	12000 Thl.;	und nun

a. 12000 Thl. : 50000 Thl. = 2500 :

1000) 12 : 50 = 2500 :

4) 3 : 50 = 625 : $\frac{625 . 50}{3}$ = $10416\frac{2}{3}$ Thl. Gewinnst der ersten.

b. 12 : 50 = 3700 :

4) 3 : 50 = 925 : $\frac{46250}{3}$ = $15416\frac{2}{3}$ Thl. der zweiten.

c. 12 : 50 = 5800 :

4) 3 : 50 = 1450 : $\frac{72500}{3}$ = $24166\frac{2}{3}$ Thl. der dritten.

Dem-

Demnach sehen wir, wie die Gewinnste dieser Personen verschieden, und nach allem Rechte zugetheilet sind, welches dadurch bestätiget wird, daß ihre Summe genau 50000 Thl. beträgt.

Zweites Beispiel. **Ein Mann habe nach seinem Tode 36000 Thl. hinterlassen, und im Testamente verordnet, daß seine Frau von diesem Vermögen die Hälfte haben, das übrige aber also unter seine 3 Kinder vertheilet werden solle, daß sich der Antheil des ersten zum Antheil des zweiten, wie 2 zu 3; hingegen der Antheil des zweiten zum Antheile des dritten, wie 4 zu 5 verhalten soll; man frägt: wieviel jedem Kinde zukomme?**

So verwickelt diese Aufgabe zu seyn scheint, so läßt sie sich doch folgendermaßen leicht auf eine der vorigen ähnliche zurückbringen; denn vorerst ist einleuchtend, daß die Kinder nicht mehr als 18000 Thl. erhalten können, weil die Mutter die Hälfte des Kapitals für sich nimmt; demnach kömmt es blos darauf an, aus den gegebenen Verhältnissen andere zu finden, von denen die zweite Größe des ersten Verhältnisses, der ersten Größe des zweiten gleich ist, welches geschiehet, wenn wir die Glieder des ersten mit 4, und die Glieder des andern mit 3 multipliziren, wodurch ihre Verhältnisse unverändert bleiben (n. §. 122.); also ist $2:3 = 8:12$, und $4:5 = 12:15$, und wir haben also die Zahlen 8, 12 und 15 erhalten, nach welchen die Erbschaft der Kinder getheilet, und gesetzt werden kann.

Das

Das 1te Kind erhält 8 Theile von der Erbschaft
" 2te " " 12 " " " "
" 3te " " 15 " " " "

$$5)\frac{35:18000 = 8}{}$$

$$7:\ 3600 = 8:\frac{28800}{7} = 4114\tfrac{2}{7}\ \text{Thl.}$$

Antheil des ersten

$$7:\ 3600 = 12:\frac{43200}{7} = 6171\tfrac{3}{7}\ \text{Thl.}$$

Antheil des zweiten

$$7:\ 3600 = 15:\frac{54000}{7} = 7714\tfrac{2}{7}\ \text{Thl.}$$

Antheil des dritten.

Drittes Beispiel. Man hat einen Vorrath von 18000, 24 T̃ge, 40000, 12 T̃ge, und 60000, 6 T̃ge Kanon-Kugeln, mit welchen man die Festungen A., B. und C. versehen will, und man weiß vermittelst eines Etats, daß A. von jeder Sorte 4000 erhalten muß, wenn B. 2500 und C. 1500 erhält; nun wird gefragt: wieviel Kugeln müssen dem Etate gemäß von diesem Vorrathe nach den drei Festungen versendet werden?

Hier schließen wir, weil nach dem Etat die Festung
A. 4000 erhält,
wenn B. 2500
und C. 1500, so folgt,

daß sämtl. Festungen 8000 erhalten; mithin setzen wir:

a. 8000:4000 = 18000 24 T̃ge

oder 2: 1 = 18000 24 T̃ge: 9000, 24 T̃ge Kugeln, welche A. bekömmt.

b. 8000:2500 = 18000 24℔ge
oder 4:2500 = 9 24℔ge
und 1: 625 = 9 24℔ge:5625,24℔ge Kugeln,
welche B. bekömmt.

c. 8000:1500 = 18000 24℔ge
oder 4:1500 = 9 24℔ge
und 1: 375 = 9 24℔ge:3375,24℔ge Kugeln,
welche C. bekömmt.

Verfähret man auf ähnliche Weise mit den gegebenen 40000, 12℔gen und 60000, 6℔gen Kugeln, so finden wir den ganzen Vorrath folgendermaßen in den drei Festungen vertheilet:

Die Festung A. erhält	9000,24℔ge,	20000,12℔ge,	30000,6℔ge.
B. "	5625 "	12500 "	18750 "
C. "	3375 "	7500 "	11250 "
also ist der Vorrath	18000,24℔ge,	40000,12℔ge,	60000,6℔ge.

Uebrigens kann auch diese Regel dazu dienen, nicht allein verschiedene gegebene Größen verhältnißmäßig zu theilen, sondern auch verschiedene Massen nach schon bekannten Verhältnissen zusammen zu setzen; um welcher letztern Anwendung willen sie zuweilen die **Vermischungsregel** genannt wird, zu der das folgende Beispiel gehört.

Viertes Beispiel. **Es sey bekannt, daß zu einem gewissen Feuerwerksatz 16 ℔ Salpeter, 7℔ Schwefel, 3 ℔ Antimonium und 2 ℔ Kohlen genommen werden; wieviel ℔ einer jeden Masse muß man nehmen, wenn man von diesem Satze 140 ℔ bedarf?**

Da

Da zu dem bekannten Satz 16 ℔ Salpeter
7 ℔ Schwefel
3 ℔ Antimonium
2 ℔ Kohlen genommen werden;

so beträgt sein Gewicht 28 ℔; mithin setzen wir

a.	28 ℔	: 140 ℔	= 16 ℔ Salpeter:		
oder	1	: 5	= 16 ℔ Salpeter:	80 ℔ Salpeter	
b.	1	: 5	= 7 ℔ Schwefel:	35 ℔ Schwefel	
c.	1	: 5	= 3 ℔ Antimon.:	15 ℔ Antimonium	
d.	1	: 5	= 2 ℔ Kohlen :	10 ℔ Kohlen	

folgl. wiegt d. neue Satz verlangtermaß. 140 ℔.

Fünftes Beispiel. Man habe 3000 Centner Pulver 20 Meilen weit nach der Festung A., 2000 Cent. 25 Meilen weit nach B. und 1800 Cent. 40 Meilen weit nach C. abzusenden, deren Transport drei Schiffer für 800 Thl. besorgen wollen; es wird gefragt: wieviel Geld muß der erste, so nach A.; der zweite, so nach B.; und der dritte, so nach C. gehet, erhalten?

Da wir in dieser Aufgabe sogleich wahrnehmen, daß nur drei unbekannte Größen zu bestimmen, und doch weit mehrere Größen, als in den bisherigen Beispielen, gegeben sind; auch die erstern weder nach den verschiedenen Quantitäten Pulver, oder Meilen allein gefunden werden können; so müssen wir dahin trachten, sie in eine der vorigen ähnliche zu verwandlen, welches geschiehet, wenn wir schließen: 3000 Ctr. auf 20 Meilen transportiret, müssen eben soviel Geld kosten, als 20 mal 3000 Ctr. oder 60000 Ctr. auf eine Meile; eben so 2000 Centner auf 25 Meilen soviel, als 25 . 2000 Centner, oder 50000 Centner auf eine Meile; endlich auch 1800 Ctr. auf 40 Meilen soviel, als 40 . 1800 Ctr., oder 72000 Centner auf eine Meile; mithin haben wir die akkordirten 800 Thl. nach der Menge

dieser gefundenen Centner unter die drei Schiffer einzutheilen, und wir können deshalb, wie gewöhnlich setzen:

Der	erste Schiffer	hat	60000	Centner
=	zweite =	=	50000	=
=	dritte =	=	72000	=
	sämtliche Schiffer		182000	= zu transporti=

ren, und folglich ist

a $182000 : 800 = 60000 :$

oder $1820 : 8 = 60000 : \frac{8 \cdot 60000}{1820} = 263\frac{134}{182}$ Thl.

der Antheil des ersten.

b. $1820 : 8 = 50000 : \frac{8 \cdot 50000}{1820} = 219\frac{142}{182}$ Thl.

der Antheil des zweiten.

c. $1820 : 8 = 72000 : \frac{8 \cdot 72000}{1820} = 316\frac{88}{182}$ Thl.

der Antheil des dritten.

und sämtliche Schiffer erhalten 800 Thl.

In dieser und den beiden folgenden Aufgaben finden wir nun, daß eigentlich die unbekannten Grössen nach Größen zusammengesetzter Verhältnisse bestimmt worden sind, daher auch ihre Rechnung die zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung genannt wird: denn die gefundenen Größen $263\frac{134}{182}$ Thl., $219\frac{142}{182}$ Thl., und $316\frac{88}{182}$ Thl. mußten mit den Größen 60000 Ctr., 50000 Ctr. und 72000 Ctr. nach der Ordnung gleiche Verhältnisse machen; welche letztere von den zusammengesetzten Verhältnissen der Grössen 3000 Centner, 2000 Centner, 1800 Centner, und 20 Meilen, 25 Meilen und 40 Meilen, nemlich von

$$\left\{\begin{matrix} 3000 \text{ Ctr.} : 2000 \text{ Ctr.} \\ 20 \text{ M.} : 25 \text{ M.} \end{matrix}\right\} \text{ und } \left\{\begin{matrix} 2000 \text{ Ctr.} : 1800 \text{ Ctr.} \\ 25 \text{ M.} : 40 \text{ M.} \end{matrix}\right\}$$

genommen wurden.

Sechstes Beispiel. Es legte jemand 2000 Thl. in einen Handel; als ein Jahr verflossen war, kam ein anderer, und bat erstern, von ihm 1800 Thl.

dazu

dazu zu nehmen, welches auch geschah; eben so kam im dritten Jahr ein dritter, und gab dazu 2600 Thl.; und endlich im vierten Jahr ein vierter, der 3600 Thl. beilegte. Nachdem nun noch drei Jahr verflossen waren, bemerkte die Gesellschaft, daß sie mit dem Gelde 50000 Thl. gewonnen hatte, und kam überein, dieses Kapital unter sich zu theilen; man frägt: wieviel jeder von ihnen davon erhalten mußte?

So verwickelt diese Aufgabe scheint, so kann man sie doch leicht auflösen, wenn man auf die mit den Größen verbundenen Bedingungen achtet, und nach denselben also schließet: Vorerst ist einleuchtend, daß der Gewinnst nicht allein nach der Größe des Beitrags eines jeden, sondern auch nach der Länge der Zeit, in welcher er benutzet war, getheilt werden muß, weshalb wir die Summe ihrer Beiträge gar nicht in Betrachtung ziehen, sondern suchen müssen, wie lange eines jeden Beitrag eigentlich gewuchert hat, welches wir finden, wenn wir gerade rückwärts gehen, und sagen: als des letzten Beitrag geschehen war, dauerte der Handel noch 3 Jahr, mithin standen

des	4ten	seine	3600 Thl.	offenbar	3	Jahr	
=	3ten	=	2600 =	=	4	=	
=	2ten	=	1800 =	=	5	=	
=	1ten	=	2000 =	=	6	=	im

Handel.

Ferner: da von selbst einleuchtet, daß 3600 Thl. in 3 Jahren nicht mehr als 3mal 3600 Thl. in einem Jahre, und eben so 2600 Thl. in 4 Jahren nicht mehr als 4mal 2600 Thl. in 1 Jahr u. s. w. bringen können; so folgt, wenn wir die Größen in umgekehrter Ordnung nehmen, daß

2000 Thl.	in 6 J.	soviel als	6.2000 Thl.	=	12000 Thl.	in 1 J.
1800 =	= 5 =	=	= 5.1800 =	=	9000 =	= = =
2600 =	= 4 =	=	= 4.2600 =	=	10400 =	= = =
3600 =	= 3 =	=	= 3.3600 =	=	10800 =	= = =

u. 10000 Thl. in 6 J. zu verschiedenen Zeiten 42200 Thl. in 1 J. nemlich 50000 Thl. bringen.

So ist nun die Aufgabe in eine gewöhnliche gebracht, wo wir die Theile von 50000 Thl. nach den Theilen der Summe 42200 Thl. bestimmen, und mithin setzen können:

a. 422ØØ Thl. : 500ØØ Thl. = 12000 Thl.
oder 422 = : 500 = = 12000 Thl. : $14218\frac{4}{422}$ Thl.
Antheil des ersten
b. 422 = : 500 = = 9000 Thl. : $10663\frac{214}{422}$ Thl.
Antheil des zweiten
c. 422 = : 500 = = 10400 Thl. : $12322\frac{116}{422}$ Thl.
Antheil des dritten
d. 422 = : 500 = = 10800 Thl. : $12796\frac{88}{422}$ Thl.
Antheil des vierten

und es ist die getheilte Summe 50000 Thl. wie sie seyn sollte.

Siebentes Beispiel. **Es sei ein Manoevre mit 12 Regimentern und 6 Grenadier-Bataillons zu machen, wozu man 2 Batterien 12 ℔ge Kanons zu 10 Stück verlangt; außerdem aber für jedes Grenadier-Bataillon 2, 6 ℔ge, und für jedes Regiment 2, 3 ℔ge Kanons. Für das sämtliche Geschütz sind 24 Ctr. Pulver bestimmt. Nun wird gefragt: wieviel Pulver zu jeder Art Geschütz genommen werden muß, damit jedes eine gleiche Menge Schuß erhalte, wenn der Zwölfpfünder mit $1\frac{1}{2}$ ℔, der Sechspfünder mit 1 ℔, und der Dreipfünder mit $\frac{3}{4}$ ℔ geladen wird?**

Vorerst müssen wir hier die Menge Geschütz genauer bestimmen, nachher jede besondere Art mit der Schwere ihrer Ladung multipliziren, wo dann die Produkte die

Theile

Theile geben, nach welchen das gegebene Pulver getheilet werden muß.

Demnach sagen wir: da 2 Batterien 12 pfündige Kanons genommen werden, so sind es in allem 20 Stück, und weil jeder Schuß von ihnen $1\frac{1}{2}$ ℔ Pulver enthält, so beträgt 1 Schuß aus allen gethan 30 ℔. Ferner: weil jedes Grenadier Bataillon 2 Sechspfünder bekömmt, so müssen in allem 2.6 = 12 Sechspfunder gegeben werden; und weil jedes 1 ℔ Ladung erhält, so beträgt ein Schuß aus allen gethan, 12 ℔. Endlich, da jedes der 12 Regimenter 2 Dreipfünder haben soll, so hat man in allem 2.12 = 24 Dreipfünder, welche offenbar, weil jedes mit $\frac{3}{4}$ ℔ Ladung versehen wird, zu einem Schuß 24. $\frac{3}{4}$ ℔ = 18 ℔ erfordern.

Es müssen sich also die Theile der 24 Centner, oder 24.110 ℔ = 2640 ℔, die jeder Art Geschütze zukommen, wie 30 ℔, 12 ℔ und 18 ℔ gegen einander verhalten, und wir können setzen:

1 Schuß bei den 12 ℔dern verlangt 30 ℔
⸗ ⸗ ⸗ ⸗ 6 ⸗ ⸗ ⸗ 12
⸗ ⸗ ⸗ ⸗ 3 ⸗ ⸗ ⸗ 18

1 Schuß bei sämtlichen Geschütz 60 ℔; woraus endlich folgt:

a. 60 : 2640 = 30 ℔ :
oder 1 : 44 = 30 ℔ : 1320 ℔ als die Menge Pulver, die zu den 12 ℔d. kommt
b. 1 : 44 = 12 ℔ : 528 ℔ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ 6 ℔d. ⸗
c. 1 : 44 = 18 ℔ : 792 ℔ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ 3 ℔d. ⸗

in allen 2640 ℔ zu sämtlichen Kanons,

davon jedes 44 Schuß erhalten muß, welches wir aus den Proporzionen unmittelbar erkennen können, weil die Menge Pulver, die zu jeder Art Geschütz gegeben wird, sich zu der Menge Pulver, die zu einem Schuß aus ihm verbraucht wird, genau so verhalten muß, als die Anzahl Schüsse zu einem einigen.

Sie⸗

Siebente Abtheilung.

Von den arithmetischen und geometrischen Progressionen, nebst ihren Anwendungen.

§. 139.

Unter einer Progression wird überhaupt jede Reihe Zahlen verstanden, die nach irgend einem Gesetze zu= oder abnehmen. So vielerlei Gesetze also angegeben werden können, eben so viele verschiedene Progressionen müssen existiren, von welchen wir gegenwärtig diejenigen betrachten wollen, deren Zahlen entweder um gleichviel oder um gleichvielmal zu= oder abnehmen, und die in Rücksicht dieser Zu= und Abnahme, welche eine den arithmetischen oder geometrischen stetigen Proporzionen ähnliche Bestimmung veranlasset, zunehmende oder abnehmende arithmetische oder geometrische Progressionen genannt werden.

Von den arithmetischen Progressionen.

§. 140.

Da der vorigen Erklärung gemäß die Zahlen, oder die Glieder einer arithmetischen Progression um gleichviel zu= oder abnehmen, so ist offenbar, daß bei jeder die Differenz zweier unmittelbar folgenden Glieder eine und eben dieselbe sey. Es beruhet demnach die Bestimmung dieser Progressionen blos auf ihr erstes Glied und ihre Differenz, die man jenem zusetzen oder von ihm wegnehmen muß.

So sind also die Reihen

÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6
÷ 1, 3, 5, 7, 9, 11
÷ 2, 4, 6, 8, 10, 12
÷ 3, 6, 9, 12, 15, 18 zunehmende Progressionen;

Hin=

Hingegen ÷ 6, 5, 4, 3, 2, 1
÷ 12, 10, 8, 6, 4, 2
÷ 24, 21, 18, 15, 12, 9 abnehmende.

Da wir bei Betrachtung dieser Progressionen sogleich wahrnehmen, daß die zunehmenden, abnehmende werden, sobald wir ihre Glieder in verkehrter Ordnung stellen; so wollen wir nur die Eigenschaften der erstern kennen zu lernen suchen, weil sich darnach die der andern von selbst bestimmen lassen.

§. 141.

Was nun bei einer Progression vornehmlich in Betrachtung kömmt, ist ihr erstes und letztes Glied, ihre Differenz und die Anzahl der Glieder, aus welchen sie bestehet; von welchen Stücken ein jedes geradezu gefunden werden muß, sobald die drei andern gegeben sind, wie wir sogleich sehen werden.

Vergleichen wir die Glieder einer Progression, eines nach dem andern mit ihrem ersten Gliede, so finden wir, daß ein jedes nebst dem ersten Gliede noch die Differenz sovielmal in sich enthält, als Glieder demselben vorhergehen.

So ist offenbar in der Progression ÷ 1,3,5.7,9,11 das zweite Glied $3 = 1 + 1 . 2$; das dritte $5 = 1 + 2.2$; das vierte $7 = 1 + 3 . 2$ ꝛc., welches nothwendig statt finden muß, weil ihr zweites Glied nicht anders entstehen kann, als daß man zum ersten die Differenz einmal addirt; ihr drittes, daß man zum zweiten wiederum die Differenz nimmt, oder zum ersten (weil das zweite die Differenz schon einmal enthielt) die Differenz zweimal addirt ꝛc. ꝛc. folglich erhellet:

Um das letzte Glied einer zunehmenden Progression zu finden, wenn davon das erste Glied, die Differenz und die Anzahl der Glieder bekannt sind, nehme man die Differenz sovielmal, als Glie-

der, weniger eins, vorhanden sind, und addire das entstehende Produkt zum ersten Gliede.

Wäre demnach von einer Progression das erste Glied $=1$, die Differenz $=2$, und die Anzahl der Glieder $=8$, so setzen wir, da $8-1=7$, so muß das achte oder letzte Glied dieser Progression $=7.2+1=14+1=15$ seyn, und wirklich ist diese Zahl das letzte Glied in der Progression ÷ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

Würde ferner die Frage gegeben: Wieviel Geld muß man einem Sappeur für den sechsten von ihm gesetzten Schanzkorb bezahlen, wenn er in einer Belagerung für den ersten einen Gulden, und für jeden folgenden drei Gulden mehr erhält? so würde man, weil er 6 Schanzkörbe gesetzt hat, antworten: er muß $(6-1).3+1=5.3+1=16$ Gulden erhalten.

Da diese gegebene Regel auf jedes beliebige Glied einer Progression anwendbar ist, so ist einleuchtend, daß man auch ein Glied wählen kann, welches bei derselben nicht mit vorgestellet seyn darf. Denn sollte das 100te Glied der ersten Progression verlangt werden, so würde solches $(100-1).2+1=99.2+1=199$ seyn; wovon man sich noch dadurch überzeugen könnte, wenn man diese Progression 1, 3, 5, 7.. bis zu dem bekannten Gliede erweiterte.

§. 142.

Vergleichen wir hingegen die Glieder einer Progression mit ihrem letzten Gliede; so finden wir, daß ein jedes aus dem Unterschiede zwischen dem letzten und dem Produkte von der Differenz und der Zahl, welche die Menge seiner nachfolgenden Glieder anzeiget, bestehet.

So ergiebt sich aus der Progression ÷ 1, 5, 9, 13, 17, 21, daß $17=21-1.4$, $13=21-2.4$ ꝛc. ꝛc. welches

ches ebenfalls statt finden mußte, weil das letzte die Differenz einmal mehr als ihr vorletztes, zweimal mehr als das dritte von ihm rc. enthalten mußte, sollten sie Glieder der Progression seyn.

Soll man also das erste Glied einer Progression finden, deren letztes Glied, die Differenz und die Anzahl der Glieder bekannt sind; so muß man die Differenz mit der Zahl multipliziren, welche die Menge Glieder weniger eins anzeiget, und vom entstehenden Produkte das erste Glied abziehen.

Wäre demnach bekannt, daß von einer Progression das letzte Glied $=56$, die Differenz 4, und die Anzahl der Glieder 9 wäre; so muß ihr erstes Glied $= 56 - (9-1).4 = 56 - 8.4 = 56 - 32 = 24$ seyn.

Wirklich ist auch die Progression

$$\div 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56.$$

Und wäre bekannt, daß ein Mineur einen Minengang 12 Fuß weit getrieben, und den letzten mit 2 Thl., aber jeden vorhergehenden mit 4 Gr. weniger bezahlt bekommen hätte; und man verlangte zu wissen: wie hoch der erste wäre zu stehen gekommen? so stellt hier 12 die Anzahl der Glieder der Progression, 2 Thl. $=$ 48 Gr. oder 48 das letzte, und 4 die Differenz vor, und mithin kostet der erste 48 Gr. $-$ (12 $-$ 1). 4 Gr. $=$ 48 Gr. $-$ 44 Gr. $=$ 4 Gr.

§. 143.

Da das letzte Glied jeder beliebigen Progression durch die Summe vom Produkte aus ihrer Differenz und der Zahl, welche ihre Menge Glieder weniger eines anzeigt, und dem ersten Gliede vorgestellet werden kann (§. 141.), also daß z. B.

von der Progression $\div$ 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, das letzte Glied $20 = (7-1).3+2$ ist, so muß man zugeben,

daß auch $20-2 = (7-1).3$ (n. §. 35. g.)

und $\frac{20-2}{7-1} = 3$ ist (n. §. 59. i.)

Bedenken wir nun, daß in diesem letztern Ausdrucke die Zahl 20 das letzte Glied, 2 das erste, $(7-1)$ die Anzahl der Glieder weniger eins, und 3 die Differenz der Progression anzeiget; so müssen wir in ihm folgende Regel erkennen:

Um die Differenz einer Progression zu finden, wenn ihr letztes und erstes Glied nebst der Anzahl ihrer Glieder gegeben ist, theile man die Differenz des ersten und letzten Gliedes durch die Zahl, welche ihre Menge Glieder weniger eins anzeiget.

Wäre demnach von einer Progression das erste Glied 15, das letzte 75, und die Anzahl ihrer Glieder 7, so muß ihre Differenz $= \frac{75-15}{7-1} = \frac{60}{6} = 10$ seyn, und es wäre die Progression $\div$ 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75.

Und würde die Aufgabe gegeben: Es hätte jemand 5 Arbeiter an eine Arbeit gestellet, und als er nach deren Beendigung wahrnahm, daß der erste nur eine Schachtruthe, der letzte aber 3 Schachtruthen, und jeder insbesondere um gleichviel mehr als sein Nebenmann ausgegraben hatte; so beschloß er dem ersten 3 Gr. und dem letzten 6 Gr., jedem andern aber verhältnißmäßig nach seiner Arbeit zu bezahlen; man frägt: Wieviel hat jeder Arbeiter mehr gearbeitet, und auch mehr an Lohn empfangen? so haben wir in derselben zweierlei Progressionen; nemlich die eine in Ansehung der Arbeit, und die andere in Betreff der Bezahlung, von deren jeder die Differenz bestimmet werden muß.

Wir setzen demnach in Ansehung der Arbeit, weil 1 das erste Glied, 3 das letzte, und 5 die Anzahl Glieder

sind;

sind; so muß die Differenz $\frac{3-1}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ seyn; also hat jeder $\frac{1}{2}$ Schachtruthe mehr als sein Nebenmann gearbeitet, und die Progression ist ÷ 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3.

Hingegen in Betreff der Bezahlung ist 3 das erste Glied, 6 das letzte, und wiederum 5 die Anzahl der Glieder; also ist die Differenz $\frac{6-3}{5-1} = \frac{3}{4}$, und mithin hat jeder $\frac{3}{4}$ Gr. oder 9 Pf. mehr erhalten, und die Progression muß ÷ 3, $3\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$, 6 seyn.

Hier ist zugleich zu bemerken, daß unter dieser Regel die Auflösung der Aufgabe: **zwischen zwei gegebenen Zahlen jede beliebige Menge arithmetisch mittlere Proporzional-Zahlen zu finden,** mitbegriffen sey. Denn würden z. B. zwischen den Zahlen 1 und 2, 7 Glieder verlangt; so machen diese mit den beiden Zahlen eine Progression von 9 Gliedern; also muß die Differenz derselben $\frac{2-1}{9-1} = \frac{1}{8}$ seyn, und die Progression wäre ÷ 1, $1\frac{1}{8}$, $1\frac{2}{8}$, $1\frac{3}{8}$, $1\frac{4}{8}$, $1\frac{5}{8}$, $1\frac{6}{8}$, $1\frac{7}{8}$, 2.

§. 144.

Um auch noch die Anzahl der Glieder einer Progression bestimmen zu lernen, wenn von ihr die andern drei Stücke bekannt sind; so nehmen wir wiederum den Ausdruck für das letzte Glied einer beliebigen Progression, wie von ÷ 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, und suchen die Zahl, welche die Menge Glieder anzeiget, auf einer Seite allein zu bekommen; indem wir schließen:

Da $27 = (7-1).4 + 3$ (n. §. 141.)

so ist $27 - 3 = (7-1).4$ (n. §. 35. g.)

und $\frac{27-3}{4} = 7 - 1$ (n. §. 59. i.)

folglich auch $\frac{27-3}{4} + 1 = 7 - 1 + 1 = 7$, d. h.

Um die Anzahl der Glieder einer Progression zu finden, theile man die Differenz ihres letzten und ersten Gliedes durch die Differenz der Glieder, und addire noch 1 zum entstehenden Quozienten.

Wäre also von einer Progression das erste Glied 5, das letzte 17, und die Differenz 2; so muß die Anzahl ihrer Glieder $\frac{17-5}{2}+1=\frac{12}{2}+1=6+1=7$ seyn, und wirklich ist die Progression ÷ 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17.

Ferner, wüßte man, daß in einer Belagerung am ersten Tage 300 Schuß, am letzten 3000, und zwar an jedem Tage 100 mehr als am vorhergehenden gegen die Festung wären gethan worden, und man verlangte zu wissen: wie lange sie gedauert hätte? so setzen wir

$$\frac{3000-300}{100}+1=\frac{2700}{100}+1=27+1=28.$$

folglich hat sie 28 Tage gedauert.

Sollte es sich treffen, daß nach den Bedingungen der Aufgabe die Differenz in dem Unterschiede des letzten und ersten Gliedes getheilet zum Quozienten keine ganze Zahl bestimmte; so ist die Aufgabe unvollkommen. Der entstehende Bruch aber beziehet sich allemal auf die Differenz, weil hier der Quozient anzeiget, wie oft der Divisor im Dividenden enthalten ist; (§. 52.) daher hat man den sovielten Theil der Differenz dem Gliede, welches die ganze Zahl des Quozienten anzeiget, zuzusetzen, um das in der Aufgabe gegebene letzte Glied zu bestimmen.

Gesetzt, man verlangte die Anzahl Glieder einer Progression zu wissen, deren erstes Glied 2, das letzte 15, und die Differenz 3 wäre; so erhielten wir $\frac{15-2}{3}+1=\frac{13}{3}+1=4\frac{1}{3}+1=5\frac{1}{3}$. Demnach enthält die Progression 5 Glieder, wo zum letzten noch $\frac{1}{3}$ von

$\frac{1}{3}$ von der Differenz 3, d. h. 1 hinzugesetzt, das angegebene Glied 15 erhalten würde; also wäre die Progression ÷ 2, 5, 8, 11, 14.

§. 145.

Was endlich noch bei diesen Progressionen vornehmlich in Betrachtung kommen kann, ist die Summe ihrer Glieder. **Um geradezu dieselbe zu finden, mache man die Summe des ersten und letzten Gliedes, multiplizire sie mit der Anzahl Glieder, und nehme davon die Hälfte.**

Wäre z. E. die Progression ÷ 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, gegeben, so ist die Summe des ersten und letzten Gliedes $= 3 + 27$, die Anzahl Glieder 7, und es muß die Summe aller Glieder $= \frac{(3+27).7}{2} = \frac{30.7}{2}$ $= 15 . 7 = 105$ seyn.

Denn setzen wir die Glieder dieser Progression unter voriger in verkehrter Ordnung, und addiren jedes zu dem über ihm stehenden; so erhalten wir eben soviele gleiche Summen, als die Progression Glieder hat, und jede ist der Summe der beiden äußersten Glieder gleich. Und nehmen wir nun diese Summen zusammen, d. h. die Summe der beiden äußern Glieder so oft, als die Progression Glieder hat, so ist in diesem Produkte die Summe der Glieder von der Progression zweimal enthalten, folglich muß man dieses Produkt halbiren, um die Summe der Glieder zu bekommen.

So war die Progression ÷ 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27
und verkehrt ÷ 27, 23, 19, 15, 11, 7, 3

mithin $(3+27).7 = 30+30+30 \; . \; . \; . +30$

und $\frac{(3+27)}{2}.7 = \frac{1}{2}(30+30+ \; . \; . \; . \; . +30)$

Sollten ferner auf einer Winterpostirung an vier verschiedenen Orten im Fall eines Angriffs Signale mit

Raketen gegeben werden, so daß man beim ersten 3, bei jedem folgenden aber um soviel mehr steigen lassen müßte, damit man an ihrer Anzahl alsbald erkennen könnte, welches der angegriffene Ort sey; und man verlangt zu wissen: wieviel Raketen diese Signale erforderten? so sprechen wir: weil das erste Glied = 3, die Differenz = 3, die Anzahl Glieder = 4, mithin das letzte Glied = $3+(4-1).3=12$ ist; so muß die Anzahl der Raketen $\frac{(12+3)}{2}.4=15.2=30$ seyn.

§. 146.

Nimmt man nach und nach von denen Progressionen, welche mit 1 anfangen, die Summe von 2, 3, 4 ꝛc. Glieder; so haben solche die Eigenschaft, daß nach ihnen, in der Ordnung, wie sie entstehen, Kugeln, Reihenweise nebeneinander gelegt, die Figur eines Dreiecks, oder Vierecks ꝛc., je nachdem die Differenz der Progressionen 1, 2, 3 ꝛc. ist, annehmen; weshalb diese Summen **vieleckigte oder Polygonal-Zahlen** genannt werden.

Nehmen wir z. E. gedachte Summen in erwähnter Ordnung von der Progression ÷ 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc.; so geben sie die **dreieckigten Zahlen**, und wir können von denselben

1	mit	1	Kugel	Fig.	1
1+2	=	3	=	=	2
1+2+3	=	6	=	=	3
1+2+3+4	=	10	=	=	4
1+2+3+4+5	=	15	=	=	5 vorstellen,

welche Figuren **dreieckigte Schichten** heißen.

Und nehmen wir sie von der Progression ÷ 1, 3, 5, 7, 9 ꝛc., so entstehen die **viereckigte**, oder **Quadratzahlen** (wie oben §. 92.) und wir können wiederum

1+3

$1+3$ durch 4 Kugeln Fig. 6
$1+3+5$ = 9 = = 7
$1+3+5+7$ = 16 = = 8
$1+3+5+7+9$ = 25 = = 9 ꝛc. vorstellen,

welche Figuren viereckigte Schichten heißen, bei denen aber die Kugeln nicht, wie vorher, in geraden Reihen, sondern in gebrochenen gelegt werden, wie es die Ziffern 1, 2, 3 bei der zweiten Reihe Fig. 6; 1, 2, 3, 4, 5 bei der dritten Fig. 7; u. s. f. anzeigen.

In beiderlei Schichten bemerken wir nun, daß die Seite einer jeden soviele Kugeln enthält, als Reihen in ihr angetroffen werden, oder als Glieder in vorgedachten Progressionen sind summiret worden. Wir könnten demnach die Menge Kugeln einer dreieckigten Schicht aus der Menge Kugeln einer ihrer Seiten nach vorigem §. bestimmen; weil aber die von einer viereckigten Schicht erfordern, daß man erst das sovielte Glied der Progression bestimme, (n. §. 141.) als die Anzahl der in ihrer Seite enthaltenen Kugeln anzeigt, um dann nach diesem bekannten Gliede die Menge der in der Schicht enthaltenen Kugeln (n. v. §.) zu finden; so müssen wir wegen der folgenden Bestimmungen eine Regel angeben, nach welcher die Menge Kugeln von den dreieckigten, wie von den viereckigten Schichten geradezu aus der Anzahl Kugeln von einer ihrer Seiten gefunden werden kann, zu der wir folgendermaßen gelangen.

Da die Seiten der nach und nach entstandenen Schichten 1, 2, 3, 4 ꝛc. Kugeln haben, so setzen wir diese Zahlen untereinander in eine Reihe (man sehe folgende kleine Tabelle) und setzen darüber Reihe für die Seiten.

Ferner, weil die Reihen der Schichten soviele Kugeln haben, als die Glieder der mehrgedachten Progressionen anzeigen, so stellen wir diese ganz allgemein dar, nemlich in zweien Theilen, wovon der erste das erste Glied der Progression, und der andere die Menge der in ihnen enthaltenen Differenzen angiebt, also daß das erste Glied

$=1$; das zweite $=1+1$. Differenz; das dritte $=1+2$. Differenz; das vierte $=1+3$. Differenz rc. ist (n. §. 141.), und setzen diese Glieder wieder in eine Reihe untereinander neben voriger, und über ihr die Worte: **Reihe für die Schichten-Reihen.**

Würde demnach gefragt: wieviel Kugeln enthält die dritte Reihe einer viereckigten Schicht? so muß uns dieses die in dieser Reihe auf der dritten Zeile stehende Größe $1+2$. Differenz angeben, welches von der 3 in der ersten Reihe angezeiget wird. Nun ist die Differenz der Kugelreihen, aus welchen die viereckigten Schichten formiret sind, die Zahl 2, also erhält man $1+2$. Differenz $=1+2.2=5$ Kugeln.

Endlich, weil die Schichten nach und nach so entstehen, wie die Kugelreihen angelegt werden, und also erstere soviele Kugeln enthalten müssen, als durch Summirung der letztern, welche durch die Glieder der vorigen Reihe angezeiget sind, erhalten werden; so addiren wir ihre Glieder nach und nach in der Art zusammen, daß wir eben soviele einzelne Summen erhalten, als Glieder zusammen addiret worden sind.

Demnach giebt

das 1te Glied	. . . . 1 . .	$=1$
das 1te und 2te „ . . .	$(1+1)+1$ Diff.	$=2+1$. Diff.
das 1te, 2te u. 3te „ . .	$(1+1+1)+(1+2)$ „	$=3+3$. Diff.
das 1te . . 4te „	$(1+1+1+1)+(1+2+3)$ „	$=4+6$. Diff.
das 1te . . . 5te „	$(1+1+1+1+1)+(1+2+3+4)$ „	$=5+10$. Diff.
		rc. rc.

weil aber hier von den Faktoren der Differenzen, als 1, 3, 6, 10 rc. rc. 1 durch $\frac{1.2}{1.2}$, 3 durch $\frac{2.3}{1.2}$, 6 durch $\frac{3.4}{1.2}$, 10 durch $\frac{4.5}{1.2}$ rc. rc. vorgestellet werden kann; so folgt, daß die erhaltenen Summen, nemlich $1=1$, $2+1$. Diff. $=2$

$= 2 + \frac{1.2}{1.2}$. Diff., $3 + 3$. Differenz $= 3 + \frac{2.3}{1.2}$. Diff., $4 + 6$. Differenz $= 4 + \frac{3.4}{1.2}$. Diff., $5 + 10$. Differenz $= 5 + \frac{4.5}{1.2}$. Differenz ꝛc. ist.

Setzen wir also diese Größen wieder in eine Reihe neben voriger, so giebt von ihr ein jedes Glied die Menge Kugeln derjenigen Schicht zu erkennen, davon die Seite soviele hat, als auf gleicher Zeile in der ersten Reihe angegeben werden, weshalb wir diese dritte Reihe die Reihe für die Schichten nennen.

Die von den dreien Reihen entstehende kleine Tabelle erhält also folgendes Ansehn.

Reihe für die Seiten	Reihe für die Schichtenreihen	Reihe für die Schichten.
1 .	1	1
2 .	$1 + 1$. Differenz .	$2 + \frac{1.2}{1.2}$. Diff.
3 .	$1 + 2$. " .	$3 + \frac{2.3}{1.2}$. "
4 .	$1 + 3$. " .	$4 + \frac{3.4}{1.2}$. "
5 .	$1 + 4$. " .	$5 + \frac{4.5}{1.2}$. "
6 ꝛc.	$1 + 5$. " ꝛc.	$6 + \frac{5.6}{1.2}$. " ꝛc.

Vergleichen wir nun die Glieder der Schichtenreihe nach ihren beiden Theilen mit den Gliedern der ersten Reihe, welche mit ihnen auf gleicher Zeile stehen; so finden wir, daß der erste Theil dem Gliede derselben Reihe gleich ist, und daß der Faktor der Differenz aus einem halben Produkte zweier Zahlen bestehet, von wel-

chen wiederum die eine dem gedachten Gliede gleich ist, die andere aber 1 weniger enthält, mithin können wir festsetzen:

Um die Anzahl Kugeln einer drei- oder viereckigten Schicht zu bestimmen, addire man zu der Zahl, welche die Menge Kugeln ihrer Seite anzeiget, die Differenz ihrer Kugelreihen so vielmal, als das halbe Produkt eben dieser Zahl in eine andere, welche 1 weniger enthält, angiebt.

Wollte man demnach die Menge Kugeln wissen, welche sowohl in einer dreieckigten, als auch in einer viereckigten Schicht enthalten sind, deren Seite aus 9 Kugeln bestehet; so setzen wir für den ersten Fall, $9+\frac{9\cdot8}{3}$. Differenz $=9+\frac{9\cdot8}{2}.1=9+36=45$, und sprechen: die dreieckigte Schicht enthalte 45 Kugeln.

Für den zweiten Fall hingegen, weil $9+\frac{9\cdot8}{2}$. Differenz $=9+\frac{9\cdot8}{2}.2=9+72=81$ ist; die viereckigte Schicht enthalte 81 Kugeln, u. s. w.

§. 147.

Machet man endlich nach und nach die Summen der Polygonal-Zahlen, so werden dieselben **Pyramidal-Zahlen** genannt, weil die nach erstern mit Kugeln bestimmten Schichten nach und nach auf einander gelegt, je nachdem sie dreieckigt, viereckigt ꝛc. sind, Kugelhaufen geben, welche die Gestalt einer dreieckigten, viereckigten ꝛc. Pyramide haben.

So bekömmt man wirklich den dreieckigten Kugelhaufen (Fig. 10) wenn man die dreieckigten Kugelschichten (Fig. 1....5) aufeinander legt; und eben so den viereckigten (Fig. 11.) wenn man eben das mit den viereckigten Schichten (Fig. 6....10) thut, und auf der obersten noch 1 Kugel bringt.

Nun

Nun entstehet die Frage: wie die in jedem dieser Kugelhaufen enthaltene Menge Kugeln, blos nach Angabe der Menge, die in einer Seite ihrer untersten Schicht (welche die Grundschicht genannt wird) liegen, gefunden werden könne? Diese beantworten zu können, schließen wir folgendermaßen:

Da die Kugelhaufen größer und größer werden, jemehr man Schichten nach der Ordnung, wie ihre Seiten 1, 2, 3 rc. Kugeln enthalten, zusammensetzet; so folgt; daß jener ihre Menge Kugeln von der Anzahl dieser Schichten abhänge. Es giebt aber in voriger Tabelle, und zwar in der Reihe für die Schichten, ein jedes Glied die Menge der in jeder Schicht enthaltenen Kugeln nach gleicher Ordnung an; also müssen auch die nach und nach genommenen Summen von 2, 3 rc. Gliedern dieser Reihe die Menge Kugeln derer Kugelhaufen angeben, von welchen die Schichten nach Angabe dieser Glieder geleget worden sind.

Machen wir demnach gedachte Summen, und setzen sie untereinander, so erhalten wir eine Reihe für die Kugelhaufen; und setzen wir neben dieser zur linken aus voriger Tabelle die Reihe für die Seiten, deren Glieder dann die Anzahl Schichten und die Menge Kugeln in der Seite der Grundschicht des auf gleicher Zeile befindlichen Kugelhaufens anzeiget; so müssen wir folgende kleine Tabelle erhalten.

Reihe für die Seiten.		Reihe für die Kugelhaufen.
1 . . .	$\frac{1.2}{1.2}$	
2 . . .	$\frac{2.3}{1.2}+\frac{1.2.3}{1.2.3}$	. Differenz
3 . . .	$\frac{3.4}{1.2}+\frac{2.3.4}{1.2.3}$	. =
4 . . .	$\frac{4.5}{1.2}+\frac{3.4.5}{1.2.3}$	. =
5 . . .	$\frac{5.6}{1.2}+\frac{4.5.6}{1.2.3}$	. =
6 2c. . .	$\frac{6.7}{1.2}+\frac{5.6.7}{1.2.3}$	. = 2c.

in welcher jedes Glied der zweiten Reihe zwei Theile hat.

Denn da von der Reihe der Schichten aus der vorigen Tabelle die nach und nach entstehenden Summen der Zahlen 1, 2, 3, 4 2c. nemlich 1 durch $\frac{1.2}{1.2}$, $1+2=3$ durch $\frac{2.3}{1.2}$, $1+2+3=6$ durch $\frac{3.4}{1.2}$ 2c., aber von den Faktoren der Differenzen, als $\frac{1.2}{1.2}=1$, $\frac{2.3}{1.2}=3$, $\frac{3.4}{1.2}=6$, $\frac{4.5}{1.2}=10$ 2c. die nach und nach eben so entstehenden Summen, nemlich 1 durch $\frac{1.2.3}{1.2.3}$, $1+3$ durch $\frac{2.3.4}{1.2.3}$, $1+3+6$ durch $\frac{3.4.5}{1.2.3}$, $1+3+6+10$ durch $\frac{4.5.6}{1.2.3}$ 2c. 2c. vorgestellet werden können; so ist offenbar,

daß

daß das erste Glied ; ; $1 = \frac{1.2}{1.2}$

die Summe des 1ten und 2ten

oder $(1+2) + 1$ Differenz $= \frac{2.3}{1.2} + \frac{1.2.3}{1.2.3}$ Differenz.

die Summe des 1. 2. und 3ten

oder $(1+2+3) + (1+3)$. Diff. $= \frac{3.4}{1.2} + \frac{2.3.4}{1.2.3}$. ;

die Summe des 1. 2. 3. und 4ten

oder $(1+2+3+4) + (1+3+6)$ Diff. $= \frac{4.5}{1.2} + \frac{3.4.5}{1.2.3}$; 2c. ist.

Vergleichen wir endlich in dieser Tabelle den ersten Theil, wie auch den Faktor der Differenz als zweiten Theil eines Gliedes der Reihe für die Kugelhaufen, mit dem zustimmenden Gliede der Reihe für die Seiten; so finden wir, daß beim ersten des Bruches Zähler aus einem Produkte zweier Faktoren bestehet, wovon der erste der vorstehenden Zahl gleich, und der andere um eins größer ist. Hingegen beim zweiten, daß des Bruches Zähler aus 3 Faktoren bestehet, von denen der erste um 1 kleiner als die vorstehende Zahl, der andere aber ihr gleich, und der dritte um 1 größer ist. Weil nun der Nenner vom ersten Bruche eigentlich die Zahl 2, und der vom letztern 6 ist; so können wir allgemein annehmen:

Um die Menge Kugeln eines pyramidenähnlichen Kugelhaufens zu finden, nehme man ein halbes Produkt von der Zahl, welche die Menge Kugeln einer Seite seiner Grundschicht anzeigt, in eine andere, welche um 1 größer ist, und addire zu demselben den 6ten Theil eines Produkts von 3 Faktoren, wovon der eine um 1 kleiner, der andere um 1 größer, und der dritte der ebengedachten Seitenzahl gleich ist mit der Differenz, um welche zwei Reihen einer Schicht von einander verschieden sind.

Würde demnach gefragt: Wieviel Kugeln enthält ein dreieckigter Kugelhaufen, dessen eine Seite 9 Kugeln hat? so würden wir antworten, weil die Differenz der Kugelreihen 1 ist: er enthalte $\frac{9.10}{1.2} + \frac{8.9.10}{1.2.3} = 45 + 120 = 165$ Kugeln.

Würde aber unter gleicher Bedingung die Frage bei einem viereckigten gethan, wo die Differenz der Reihen 2 ist; so müßten wir antworten: er enthalte $\frac{9.10}{1.2} + \frac{8.9.10}{1.2.3}.2 = 45 + 120.2 = 45 + 240 = 285$ Kugeln.

Da bei der Artillerie der Bequemlichkeit wegen vorgedachte Kugelhaufen, und noch länglichte (wie Fig. 12) aufgestellet werden; so hat man, dieselbe leicht berechnen zu können, folgende ganz einfache Regeln erfunden, die wir hier aus vorigem allgemeinen Satze ableiten können.

Regel zur Berechnung der dreieckigten Kugelhaufen.

Die Menge Kugeln eines dreieckigten Haufens zu bestimmen, nehme man die Anzahl einer Seite mit zwei andern um 1 steigende Zahlen als Faktores, mache von ihnen ein Produkt, und nehme davon den sechsten Theil.

Hätte also die Seite, wie vorher, 9 Kugeln; so muß der Haufen $\frac{9.10.11}{1.2.3} = 3.5.11 = 165$ Kugeln enthalten.

Denn da diese Anzahl nach dem vorgetragenen Satze durch $\frac{9.10}{1.2} + \frac{8.9.10}{1.2.3}$ vorgestellet werden muß, und

und der Werth dieser Brüche sich in nichts verändern kann, wenn die Glieder des ersten mit gleicher Zahl multipliziret werden (§. 72.), so ist $\frac{9.10}{1.2} + \frac{8.9.10}{1.2.3}$

$$= \frac{9.10.3}{1.2.3} + \frac{8.9.10}{1.2.3}.$$

Es sind aber in diesem entstandenen Ausdrucke, der die Summe zweier Produkte vorstellet, die Zahlen 9.10 gemeinschaftliche Faktores der Zahlen 3 und 8; also kann man diese beiden addiren, und dann mit gedachten Faktoren multipliziren (§. 42.) folglich ist $9.10.3 + 8.9.10 = 9.10.(8+3) = 9.10.11$, und weil von jener Summe der sechste Theil zu nehmen war, so muß auch von diesen derselbe Theil genommen werden; mithin ist, $\frac{9.10.3}{1.2.3} + \frac{8.9.10}{1.2.3} = \frac{9.10.11}{1.2.3}$.

Regel zur Berechnung der viereckigten Kugelhaufen.

Man nehme die Kugeln einer Seite doppelt, mache von der entstehenden Summe und zweien andern, welche um 1 steigen, ein Produkt, und nehme davon den 12ten Theil.

Hätte demnach wiederum die Seite 9 Kugeln, so würde dieser Haufen $\frac{18.19.20}{1.2.3.4} = 3.19.5 = 285$ Kugeln enthalten.

Denn da nach dem allgemeinen Satze die Menge der in diesem Haufen enthaltenen Kugeln $\frac{9.10}{1.2} + \frac{8.9.10}{1.2.3}.2$ vorgestellet wird, und sein Werth durch Multiplikazion der Glieder eines Bruches mit gleichen

Zahlen

Zahlen nicht verändert werden kann, so folgt, daß

$$\frac{9.10}{1.2}+\frac{8.9.10.2}{1.2.3}=\frac{9.10.4.3}{1.2.3.4}+\frac{8.9.10.2.4}{1.2.3.4}$$

ist. Es ist aber im letztern $4.9.10=(2.9).(2.10)$ $=18.20$ ein gemeinschaftlicher Faktor, mithin muß

$$(\text{n.§.42})\ \frac{9.10.4.3}{1.2.3.4}+\frac{8.9.10.4.2}{1.2.3.4}=\frac{18.20.(3+8.2)}{1.2.3.4}.$$

seyn; weil endlich auch $3+8.2=19$ ist; so folgt, daß $\frac{18.20.(3+8.2)}{1.2.3.4}=\frac{18.19.20}{1.2.3.4}$ ist.

Regel zur Berechnung der länglichten Kugelhaufen.

Um die Anzahl Kugeln eines länglichten Kugelhaufens zu finden, zähle man die Kugeln, welche in der Grundschicht nach der Breite und Länge liegen, wie auch die von seiner zu oberst liegenden Reihe, oder seines Rückens; mache sodann ein Produkt dreier Faktoren, von welchen der erste die Anzahl Kugeln seiner Breite, der zweite 1 mehr, und der dritte diejenige Summe angiebt, welche durch die Menge Kugeln des Rückens, und durch die von seiner Länge, aber doppelt genommen, bestimmet wird; und nehme von dem entstehenden Produkte den 6ten Theil.

Wäre demnach von einem länglichten Haufen (Fig. 12.) bekannt, daß er zur Länge 12 Kugeln, zur Breite 5 Kugeln, und zur obersten Reihe 8 Kugeln hat, und man wollte wissen: wieviel er enthalte? so setzen wir, $\frac{5.6.(2.12+8)}{1.2.3}=\frac{5.6.(24+8)}{1.2.3}=\frac{5.6.32}{1.2.3}$ $=160$, und antworten: er enthalte 160 Kugeln.

Denn betrachten wir ihn genau, so finden wir, daß er aus einem viereckigten Haufen, welcher die Anzahl

Kugeln

Kugeln in der Breite zur Seite seiner Grundschicht hat, (wie es die punktirten Linien anzeigen) und aus so vielen dreieckigten Schichten bestehet, als da Kugeln übrig bleiben, wenn die in der Breite von denen in der Länge weggenommen werden.

Nun enthält der viereckigte Haufen nach dem allgemeinen Satze

$$\frac{5.6}{1.2}+\frac{4.5.6}{1.2.3}.2, \text{ oder (zufolge §. 72.)}$$

$$\frac{5.6.3}{1.2.3}+\frac{4.5.6}{1.2.3}.2, \text{ oder (n. §. 42.)}$$

$$\frac{5.6}{1.2.3}(3+2.4), \text{ oder } \frac{5.6.11}{1.2.3} \text{ weil } 3+2.4=11 \text{ ist.}$$

Da aber die Länge 12 Kugeln, und die Breite 5 hat, so sind noch im Haufen $12-5=7$ Schichten, deren jede in einer ihrer Seiten 5 Kugeln enthält.

Nun muß eine jede Schicht $\frac{5.6}{1.2}$ Kugeln, (§. 145.) mithin sämtliche $\frac{5.6}{1.2}.7$, und also dieser länglichte Haufe $\frac{5.6.11}{1.2.3}+\frac{5.6.7}{1.2}$

oder (n. §. 72.) $\frac{5.6.11}{1.2.3}+\frac{5.6.7.3}{1.2.3}$

oder (n. §. 42.) $\frac{5.6}{1.2.3}.(11+21)=\frac{5.6.32}{1.2.3}$;

oder, (weil $32=2.12+8$ ist), $\frac{5.6.(2.12+8)}{1.2.3}=160$ Kugeln enthalten.

Von den geometrischen Progressionen.

§. 148.

Da die Glieder einer geometrischen Progression um gleichvielmal zu- oder abnehmen (§. 139.), und also von ihr zwei beliebig genommene unmittelbar auf einander folgende Glieder ein und ebendasselbe geometrische Verhältniß bestimmen müssen (§. 120.); so erhellet, daß bei jeder nur ein Exponent statt finde.

Demnach beruhet die Bestimmung dieser Progressionen lediglich und allein auf ihrem ersten Gliede und ihrem Exponenten, mit dessen Potenzen (§. 104) jenes entweder multipliziret oder getheilet wird.

Es sind folglich die Reihen

$\div\!\div$ 1, 2, 4, 8, 16 ꝛc.
$\div\!\div$ 1, 3, 9, 27, 81 ꝛc.
$\div\!\div$ 2, 6, 18, 54, 162 ꝛc. zunehmende,
und $\div\!\div$ 625, 125, 25, 5, 1
$\div\!\div$ 512, 128, 32, 8, 2 abnehmende Progressionen; bei welchen wir, (wie bei den arithmetischen §. 140) wahrnehmen, daß erstere in leztere verwandelt werden, sobald man ihre Glieder in verkehrter Ordnung stellet, weshalb wir uns blos mit erstern beschäftigen dürfen.

§. 149.

Betrachten wir nun in dergleichen Progressionen wie in $\div\!\div$ 2, 6, 18, 54, 162 ꝛc. jedes Glied in Vergleichung mit dem ersten; so finden wir, daß solches einem Produkte gleich ist, was da entstehet, wenn man das erste Glied mit der sovielten Potenz des Exponenten multipliziret, als Glieder vor dem angenommenen vorhergehen.

So ist das zweite Glied $6 = 2 \cdot 3^1$; das dritte $18 = 2 \cdot 3^2$, das vierte $54 = 2 \cdot 3^3$; das fünfte $162 = 2 \cdot 3^4$.

Wir

Wir können demnach immer das letzte Glied einer Progression finden, wenn ihr erstes Glied, ihr Exponent, und die Menge ihrer Glieder gegeben wird. Denn sollte z. B. das fünfte Glied derjenigen Progression verlangt werden, davon das erste Glied = 1, und der Exponent = 4 ist; so muß das verlangte Glied $1 . 4^4 = 1 . 4 . 4 . 4 . 4 = 256$, und also auch die Progression ∺ 1, 4, 16, 64, 256 seyn.

Oder sagte man: Es starb jemand, der vor 4 Jahren eine Präbende für 4000 Thl. gekauft, und seine davon erhaltenen jährlichen Einkünfte von 400 Thl. zum Besten seiner Verwandten zurückgeleget hatte; man frägt: Wieviel Verlust dieselben an dem Kapital von 4000 Thl. gehabt haben? so schließen wir:

Da der Mann 4 Jahre lang 400 Thl. eingenommen hat, so haben die Verwandten 4 . 400 = 1600 Thl. bei seinem Tode vorgefunden, und ihr Verlust würde 4000 — 1600 = 2400 Thl. seyn, wenn nicht der Verstorbene das Kapital zu 5 proCent und obenein die von ihm erhaltenen Zinsen als kleinere Kapitalien unter gleichen pr. C. hätte austhun können. Um also das von diesen kleinern Kapitalien und dem gegebenen entstehende Kapital zu bestimmen, muß man das 5te Glied einer Progression erforschen, davon das erste Glied 4000, und der Exponent $\frac{105}{100} = \frac{21}{20}$ ist; mithin erhalten wir $4000 . \frac{21^4}{20^4} = 4000 . \frac{21^2 . 21^2}{20^2 . 20^2}$ $= 4000 . \frac{441 . 441}{400 . 400} = 4862\frac{1}{40}$ Thl., und zum Verluste $4862\frac{1}{40}$ Thl. — 1600 Thl. = 3260 Thl. 6 Pf.

Denn hätten wir geschlossen 100 Thl. geben zu 5 pr. C. 5 Thl., also 100 Thl. in einem Jahre 105 Thl; so müßte man auch setzen, um das von 4000 Thl. in einem Jahre entstehende Kapital zu erhalten:

100 Thl. : 105 Thl. oder $20:21 = 4000$ Thl. : $4000 . \frac{21}{20}$ Thl.
Kapital des 1ten Jahres

Ferner $20:21 = 4000 . \frac{21}{20}$ Thl. : $4000 . \frac{21}{20} . \frac{21}{20}$ Thl. Kapital des 2ten Jahres ꝛc. ꝛc.

Dergleichen Rechnung wird im gemeinen leben Zins auf Zins Rechnung genannt, bei der man blos beobachten darf, daß man das Kapital mit der sovielten Potenz vom Exponenten $\frac{21}{20}$ multipliziren muß, als das Kapital Jahre gestanden hat.

§. 150.

Vergleichen wir hingegen die Glieder dieser Progressionen mit ihrem letzten Gliede; so ergiebt sich, daß ein jedes demjenigen Quozienten gleich ist, welcher entstehet, wenn man das letzte Glied mit der sovielten Potenz des Exponenten theilet, als Glieder dem genommenen nachfolgen.

So ist von voriger Progression $\div\!\!\div$ 1, 4, 16, 64, 256 das vierte Glied $64 = \frac{256}{4^1}$; das dritte $16 = \frac{256}{4^2}$; das zweite $4 = \frac{256}{4^3}$; und das erste $1 = \frac{256}{4^4}$.

Demnach kann auch das erste Glied einer Progression gefunden werden, wenn von ihr das letzte Glied, der Exponent und die Anzahl ihrer Glieder gegeben wird.

Wäre z. B. von einer Progression das letzte Glied $= 162$, der Exponent $= 3$, und die Menge ihrer Glieder $= 5$; so stehen nach dem ersten $5 - 1 = 4$ Glieder,

und

und es muß das erste Glied $\frac{162}{3^4} = \frac{162}{81} = 2$ seyn; und wirklich ist die Progression ∺ 2, 6, 18, 54, 162.

Hiernach lassen sich ebenfalls Aufgaben der Zins auf Zins Rechnung, wie auch andere dem im 142ten §. ähnliche auflösen.

Sollte z. B. gefragt werden: wie stark muß ein Kapital gewesen seyn, was mit dem Bedinge 3 Jahre lang genutzt worden, daß es nach verflossener Zeit nebst Zinsen zu 5 pr. C. zurück bezahlet werde, und man habe 185220 Thl. erhalten? so müssen wir antworten, weil wegen der 3 Jahre die Progression 4 Glieder hat; es sey $185220 : \frac{21^3}{20^3} = 185220 \cdot \frac{20^3}{21^3} = \frac{185220 \cdot 8000}{9261}$ Thl. $=$ 160000 Thl. stark gewesen, indem dieses Kapital 3 Jahre lang zu Zins auf Zins ausgethan, das ausgezahlte (n. vorigen §.) wieder hervorbringen muß.

§. 151.

Da das letzte Glied jeder Progression durch ein Produkt aus dem erstem Gliede und der sovielten Potenz des Exponenten, als die Progression Glieder weniger eines hat, vorgestellet werden kann, (§. 149.) also daß von der Progression ∺ 2, 6, 18, 54, 162

das fünfte Glied $162 = 2 \cdot 3^4$ ist; so folgt,

daß auch $\frac{162}{2} = 3^4$ seyn muß, (n. §. 59. h.)

welcher Ausdruck zu erkennen giebt.

Um den Exponenten einer geometrischen Progression zu finden, wenn deren erstes und letztes Glied nebst der Anzahl ihrer Glieder bekannt sind, theile man das letzte durch das erste und suche eine

 Zahl,

Zahl, die, zur sovielten Potenz, als die Progreßsion Glieder weniger eines hat, erhoben, dem erhaltenen Quozienten gleich ist; so ist solche der verlangte Exponent.

Gesetzt, es habe eine Progression 4 Glieder, wovon das erste $=4$, und das letzte $=256$, so ist $\frac{256}{4}=64$, die $(4-1)$te oder die 3te Potenz des Exponenten, oder seine Kubikzahl; folglich muß der Exponent $=\sqrt[3]{64}$ $=4$, und die Progression $\div\!\!\div$ 4, 16, 64, 256 seyn.

Hierbei müssen wir bemerken, daß unter dergleichen Aufgabe zugleich diese: zu zwei gegebenen Größen zwei oder mehrere mittlere geometrische Proporzionalgrößen zu finden, mitgegeben sey, weil die Auflösung derselben, wie wir im letztern Beispiele sehen, blos von dem zu findenden Exponenten abhängt, mit welchem man nur das erste Glied und dann die nach und nach entstehenden multipliziren darf. Da nun derselbe bei blos zwei zu bestimmenden geometrischen mittlern Proporzionalgrößen immer die Kubikwurzel des Quozienten der beiden gegebenen Zahlen ist; so erkennen wir hiernach zugleich, welchen Nutzen gegenwärtig die Kubikwurzeln verschaffen.

Uebrigens ist einleuchtend, daß hier auch noch der, in dem 143ten §. enthaltenen Aufgabe, ähnliche Aufgaben gemacht werden könnten, mit denen wir uns aber nicht aufhalten wollen.

§. 152.

Betrachten wir ferner den Ausdruck $\frac{162}{2}=3^4$ in der Hinsicht: wie oft der Exponent 3 im Quozienten des ersten und letzten Gliedes, $\left(\text{nemlich } \frac{162}{2}\right)$ der Progression $\div\!\!\div$ 2, 6, 18, 54, 162 enthalten sey; so finden wir, daß

daß diese die Ziffer 4 der Potenz 3^4 anzeiget. Nun giebt aber auch diese Ziffer, von der Progression die Menge Glieder weniger 1 zu erkennen; mithin folgt:

Um die Menge Glieder einer Progression, von der das erste und letzte Glied nebst den Exponenten gegeben sind, zu bestimmen, suche man den Quozienten der beiden gegebenen Glieder, und theile diesen so oft mit dem Exponenten, bis kein Rest bleibet. Sodann prüfe man, wievielmal derselbe als Divisor gebraucht worden ist, und vermehre die Zahl, welche dieses anzeigt, um 1; so giebt die entstehende Zahl die Menge Glieder der Progression zu erkennen.

Wäre also von einer Progression das erste Glied $=2$, das letzte $=512$, und der Exponent $=4$; so ist der Quozient $\frac{512}{2}=256$, und wir setzen:

getheilt 1 mal mit 4) 256
noch 1 = = 4) 46
= 1 = = 4) 16
= 1 = = 4) 4
1

folglich ist 4 mal der Exponent als Divisor gebraucht worden, und es muß die Progression $4+1=5$ Glieder haben. Auch ist wirklich die Progression ∺ 2, 8, 32, 128, 512.

Und wäre von einer Progression das erste Glied 27, das letzte $\frac{84375}{1024}$, und der Exponent $\frac{5}{4}$,

so ist $\frac{84375}{1024}:27=\frac{3125}{1024}$, und man erhält

zum 1ten mal $\frac{3125}{1024}:\frac{5}{4}=\frac{625}{256}$

 zum

$$\text{zum 2ten mal } \frac{625}{256} : \tfrac{5}{4} = \frac{125}{64}$$

$$\text{- 3ten - } \frac{125}{64} : \tfrac{5}{4} = \frac{25}{16}$$

$$\text{- 4ten - } \frac{25}{16} : \tfrac{5}{4} = \tfrac{5}{4}$$

und zum 5ten - $\tfrac{5}{4} : \tfrac{5}{4} = 1$; folglich ist die Anzahl der Glieder der Progression $5 + 1 = 6$, und sie selbst $\div\!\!\div$ 27, $\frac{135}{4}$, $\frac{675}{16}$, $\frac{3375}{64}$, $\frac{16875}{256}$, $\frac{84375}{1024}$.

Und sagte jemand: Man habe 185220 Thl. von einem Kapital von 160000 Thl. erhalten, was gewisse Jahre mit seinen Zinsen zu 5 pro Cent gestanden, und wir sollten angeben, wie lange dieses geschehen? so gedenken wir uns alsbald die vorgebenen Größen als erstes und leztes Glied einer Progression, deren Exponent $\frac{21}{20}$ ist, und verfahren auf vorige Art; nemlich, wir schließen weil $\frac{185220}{160000} = \frac{9261}{8000}$, so muß

$$\text{zum 1ten mal } \frac{9261}{8000} : \frac{21}{20} = \frac{441}{400}$$

$$\text{- 2ten - } \frac{441}{400} : \frac{21}{20} = \frac{21}{20},$$

$$\text{und - 3ten - } \frac{21}{20} : \frac{21}{20} = 1 \text{ geben,}$$

und demnach erhellet, daß 160000 Thl. samt ihren Zinsen 3 Jahre gestanden haben, weil eben dieses ausgestellte Kapital das 4te Glied der Progression ausmacht.

Indessen müssen wir hier bemerken, daß nach dieser angezeigten Methode nur diejenigen Aufgaben aufgelöset werden können, wo der Quozient vom ersten

und

und letzten Gliede durch den Exponenten nach und nach getheilet, zum letzten Quozient, wie bisher, 1 giebt. Gehet aber diese Theilung nicht an, so muß man sich mit der Näherung begnügen, die erhalten wird, wenn man den Quozienten sovielmal nach einander mit dem umgekehrten Exponenten (im Fall dieser ein Bruch ist) multipliziret, bis ein Bruch entstehet, dessen Nenner größer als der Zähler ist, weil dieser die Grenze der Anzahl Glieder von der Progression zu erkennen giebt.

Gesetzt, man frägt: wielange müssen 10000 Thl. mit ihren Zinsen zu 4 pro C. stehen, damit sie zu einem Kapital von 11800 Thl. heranwachsen? so haben wir eigentlich eine Progression, davon der Exponent $\frac{104}{100} = \frac{26}{25}$, und der Quozient der beiden äussersten Glieder $\frac{11800}{10000} = \frac{59}{50}$ ist, und wir können setzen:

zum 1ten mal giebt $\frac{59}{50} \cdot \frac{25}{26} = \frac{1475}{1300}$

" 2ten " " $\frac{1475}{1300} \cdot \frac{25}{26} = \frac{73750}{33800}$

" 3ten " " $\frac{73750}{33800} \cdot \frac{25}{26} = \frac{911875}{878800}$

" 4ten " " $\frac{911875}{878800} \cdot \frac{25}{26} = \frac{22928875}{22848800}$

und zum 5ten " " $\frac{22928875}{22848800} \cdot \frac{25}{26} = \frac{573221875}{594068800}$

Da wir nun bei diesem letzten Bruche wahrnehmen, daß der Zähler kleiner als der Nenner ist, so schließen wir, daß die 10000 Thl. samt ihren Zinsen nicht volle 5 Jahre, sondern nur 4 Jahre und einige

Monate stehen müssen, wenn sie zu 11800 Thl. heranwachsen sollen. Und suchen wir: wie groß das Kapital in 4 Jahren werde, so finden wir (n. §. 149.), daß es zu 11761 Thl. heranwachse.

Uebrigens können diese Aufgaben durch die sogenannten Logarithmen noch genauer aufgelöset werden, mit denen wir uns aber hier nicht beschäftigen, weil sie zu unsrer Absicht nicht unumgänglich nothwendig sind.

§. 153.

Endlich kömmt bei diesen Progressionen noch die Summe ihrer Glieder in Betrachtung, für welche diese einfache Regel dienen kann:

Die Summe der Glieder einer geometrischen Progression zu finden, multiplizire man das letzte Glied mit ihrem Exponenten, nehme vom Produkte das erste, und theile die entstehende Differenz mit ihrem um 1 verminderten Exponenten.

Wäre demnach eine beliebige Progression wie $\div$ 3, 12, 48, 192, 768 gegeben, so muß die Summe der Glieder $= \frac{768 \cdot 4 - 3}{(4-1)} = \frac{3072 - 3}{3} = \frac{3069}{3} = 1023$ seyn.

Denn multipliziren wir die Glieder der Progression $\div$ 3, 12, 48, 192, 768, mit ihrem Exponenten 4, so entstehet die Progression $\div$ 12, 48, 192, 768, 3072, davon offenbar ein jedes Glied das zustimmende Glied von jener, und also auch die Summe der Glieder von dieser die Summe der Glieder von jener, eben so oft, als der Exponente die Einheit, enthält. Nun enthält aber auch die entstandene Progression alle Glieder der gegebenen, außer ihrem ersten 3, und dann noch das aus ihrem letzten 768 und dem Exponenten 4 gefundene Produkt 3072 als letztes Glied; ziehen wir also die Summe der gegebenen von der Summe der entstandenen ab, so kann nur

nur der Unterschied zwischen dem letzten Gliede 3072 von der zweiten, und dem ersten Gliede 3 von der ersten entstehen, der folglich die Summe der Glieder von der gegebenen Progression so oft enthält, als der Exponent 4, um 1 vermindert, anzeigt; mithin muß man mit dieser Zahl diesen Unterschied theilen, um die Summe der Glieder von der gegebenen Progression zu erhalten.

Ferner ist von der Progression ∺ 1, 3, 9, 27, 81 die Summe $= \frac{81 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = \frac{243 - 1}{2} = \frac{242}{2} = 121.$

Und von der Progression ∺ $1, \frac{5}{4}, \frac{25}{16}, \frac{125}{64}, \frac{625}{256}$ die Summe

$$\frac{\frac{625}{256} \cdot \frac{5}{4} - 1}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{\frac{3125}{1024} - \frac{1024}{1024}}{\frac{5}{4} - \frac{4}{4}} = \frac{\frac{2101}{1024}}{\frac{1}{4}} = \frac{2101}{256} = 8\frac{53}{256}.$$

Beispiel. Es habe jemand 1000 Thl. zu 5 pro C. ausgethan, um die davon nach jedem Jahre zu erhaltene Interessen zu außerordentlichen Ausgaben anzuwenden; als sich aber noch vor Ablauf des Jahres seine Einkünfte so ansehnlich vermehrten, daß er von ihnen jährlich 200 Thl. zurücklegen konnte; so beschloß er diese jenem Kapital zuzulegen, und die von ihnen fallenden Interessen ebenfalls zu 5 pro C. stehen zu lassen; man frägt: wie stark sein Kapital nach Verlauf von 4 Jahren geworden sey?

Diese Aufgabe aufzulösen, schließen wir: da das Kapital von 1000 Thl. mit seinen fallenden Interessen 4 Jahre gestanden hat, so ist es am Ende dieser Zeit zu $\frac{21^4}{20^4} \cdot 1000$ Thl. herangewachsen (§. 149.) was aber die hinzugethane 200 Thl. betrift, so ist klar, daß der Mann

nach

nach 1 Jahre 200 Thl.

" 2 " $\frac{21}{20} . 200$ " $+ 200$ Thl.

" 3 " $\frac{21^2}{20^2} . 200$ " $+ \frac{21}{20} . 200 + 200$ Thl.

" 4 " $\frac{21^3}{20^3} . 200$ " $+ \frac{21^2}{20^2} . 200 + \frac{21}{20} . 200 + 200$ Thl.

zu ersterm bekommen hat; mithin muß das ganze Kapital nach 4 Jahren.

$$\frac{21^4}{20^4} . 1000 \text{ Thl.} + \left(\frac{21^3}{20^3} . 200 + \frac{21^2}{20^2} . 200 + \frac{21}{20} . 200 + 200 \right) \text{Thl.}$$

betragen.

Nun geben hier die in der Parenthese eingeschloßnen Glieder eine der vorigen ähnliche Progression, (wenn man sie in umgekehrter Ordnung stellt) deren Exponent $\frac{21}{20}$ ist; also muß wiederum ihre Summe.

$$\frac{\frac{21^3}{20^3} . 200 . \frac{21}{20} - 200}{\frac{21}{20} - 1} = \frac{\frac{21^4}{20^4} . 200 - 200}{\frac{1}{20}} =$$

$$\left(\frac{21^4}{20^4} . 200 - 200 \right) . 20 = \frac{21^4}{20^4} . 4000 - 4000 \text{ seyn,}$$

und folgl. das Kapital $\frac{21^4}{20^4} . 1000$ Thl. $+ \frac{21^4}{20^4} . 4000$ Thl. $- 4000$ Thl. $= \frac{21^4}{20^4} . 5000$ Thl. $- 4000$ Thl. betragen (n. §. 42.), weil der Exponent $\frac{21^4}{20^4}$ von 1000 Thl. und 4000 Thl. ein gemeinschaftlicher Faktor ist.

Es

Es giebt aber $\frac{21^4}{20^4} = \frac{21.21.21.21}{20.20.20.20} = \frac{194481}{160000}$,

mithin $\frac{21^4}{20^4} . 5000$ Thl. $= \frac{194481}{1600\not{0}\not{0}} . 5\not{0}\not{0}\not{0} =$

$\frac{972405}{160} = 6077\frac{1}{2}$ Thl. und es muß $6077\frac{1}{2}$ Thl. — 4000 Thl. $= 2077\frac{1}{2}$ Thl. seyn.

Da wir nunmehro den Gebrauch der Zahlen nach ihren Eigenschaften hinreichend kennen gelernet haben, und sie bei allen in der Geometrie vorkommenden praktischen Fällen gewiß werden anzuwenden wissen; so schließen wir hiemit.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Tafeln

der

Quadrat- und Kubikzahlen

von 1 bis 1000.

Die Quadratzahlen von 1 bis 1000.

	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
1	1	10201	40401	90601	160801	251001	361201	491401	641601	811801
2	4	10404	40804	91204	161604	252004	362404	492804	643204	813604
3	9	10609	41209	91809	162409	253009	363609	494209	644809	815409
4	16	10816	41616	92416	163216	254016	364816	495616	646416	817216
5	25	11025	42025	93025	164025	255025	366025	497025	648025	819025
6	36	11236	42436	93636	164836	256036	367236	498436	649636	820836
7	49	11449	42849	94249	165649	257049	364849	499849	651249	822649
8	64	11664	43264	94864	166464	258064	369664	501264	652864	824464
9	81	11881	43681	95481	167281	259081	370881	502681	654481	826281
10	100	12100	44100	96100	168100	260100	372100	504100	656100	828100
11	121	12321	44521	96721	168921	261121	373321	505521	657721	829921
12	144	12544	44944	97344	169744	262144	374544	506944	659344	831744
13	169	12769	45369	97969	170569	263169	375769	508369	660969	833569
14	196	12996	45796	98596	171396	264196	376996	509796	662596	835396
15	225	13225	46225	99225	172225	265225	378225	511225	664225	837225
16	256	13456	46656	99856	173056	266256	379456	512656	665856	839056
17	289	13689	47089	100489	173889	267289	380689	514089	667489	840889
18	324	13924	47524	101124	174724	268324	381924	515524	669124	842724
19	361	14161	47961	101761	175561	269361	383161	516961	670761	844561
20	400	14400	48400	102400	176400	270400	384400	518400	672400	846400
21	441	14641	48841	103041	177241	271441	385641	519841	674041	848241
22	484	14884	49284	103684	178084	272484	386884	521284	675684	850084
23	529	15129	49729	104329	178929	273529	388129	522729	677329	851929
24	576	15376	50176	104976	179776	274576	389376	524176	678976	853776
25	625	15625	40625	105625	180625	275625	390625	525625	680625	855625
26	676	15876	51076	106276	181476	276676	361876	527076	682276	857476
27	729	16129	51529	106929	182329	277729	393129	528529	683929	859329
28	784	16384	51984	107584	183184	278784	394384	529984	685584	861184
29	841	16641	52441	108241	184041	279841	395641	531441	687241	863041
30	900	16900	52900	108900	184900	280900	396900	532900	688900	864900
31	961	17161	53361	109561	185761	281961	398161	534361	690561	866761
32	1024	17424	53824	110224	186624	283024	399424	535824	692224	868624
33	1089	17689	54289	110889	187489	284089	400689	537289	693889	870489
34	1156	17956	54756	111556	188356	285156	401956	538756	695556	872356
35	1225	18225	55225	112225	189225	286225	403225	540225	697225	874225
36	1296	18496	55696	112896	190096	287296	404496	541696	698896	876096
37	1369	18769	56169	113569	190961	288369	405769	543169	700569	877969
38	1444	19044	56644	114241	191844	289444	407044	544644	702244	879844
39	1521	19321	57121	114921	192721	290521	408321	546121	703921	881712
40	1600	19600	57600	115600	193600	291600	409600	547600	705600	883600
41	1681	19881	58081	116281	194481	292681	410881	549081	707281	885481
42	1764	20164	58564	116964	195364	293764	412164	550564	708964	887364
43	1849	20449	59049	117649	196249	294849	413449	552049	710649	889249
44	1936	20736	59536	118336	197136	295936	414736	553536	712336	891136
45	2025	21025	60025	119025	198025	297705	416025	555025	714025	893025
46	2116	21316	60516	119716	198916	298116	417316	556516	715716	894916
47	2209	21609	61009	120409	199809	299209	418609	558009	717409	896809
48	2304	21904	61504	121104	200704	300304	419904	559504	719104	898704
49	2401	22201	62001	121801	201601	301401	421201	561001	720801	900601
50	2500	22500	62500	122500	202500	302500	422500	562500	722500	902500

Die Quadratzahlen von 1 bis 1000.

	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
51	2601	22801	63001	123201	203401	303601	423801	564001	724201	904401
52	2704	23104	63504	123904	204304	304704	425104	565504	725904	906304
53	2809	23409	64009	124609	205209	305809	426409	567009	727609	908209
54	2916	23716	64516	125316	206116	306916	427716	568516	729316	910116
55	3025	24025	65025	126025	207025	308025	429025	570025	731025	912015
56	3136	24336	65536	126736	207936	309136	430336	571536	732736	913936
57	3249	24649	66049	127449	208849	310249	431649	573049	734449	915849
58	3364	24964	66564	128164	209764	311364	432964	574564	736164	917764
59	3481	25281	67081	128881	210681	312481	434281	576081	737881	919681
60	3600	25600	67600	129600	211600	313600	435600	577600	739600	921600
61	3721	25921	68121	130321	212521	314721	436921	579121	741321	623521
62	3844	26244	68644	131044	213444	315844	438244	580644	743044	925444
63	3969	26596	69169	131769	214369	316969	439569	582169	744769	927369
64	4096	26896	69696	132496	215296	318096	440896	583696	746496	929296
65	4225	27225	70225	133225	216225	319225	442225	585225	748225	931225
66	4356	27556	70756	133956	217156	320356	443556	576756	749956	933156
67	4489	27889	71289	134689	218089	321489	444889	588289	751689	935089
68	4624	28224	71824	135424	219024	322624	446224	589824	753424	937024
69	4761	28561	72361	136161	219961	323761	417561	591361	755161	938961
70	4900	28900	72900	136900	220900	324900	448900	592900	756900	940900
71	5041	29241	73441	137641	221841	326041	450241	594441	758641	942841
72	5184	29584	73984	138384	222784	327184	451584	595984	760384	944784
73	5329	29929	74529	139129	223729	328329	452929	597529	762129	946729
74	5476	30276	75076	139876	224676	329476	454276	599076	763876	948676
75	5625	30625	75625	140625	225625	330625	455625	600625	765625	950625
76	5776	30976	76176	141376	226576	331776	456976	602176	767376	952576
77	5929	31329	76729	142129	227529	332929	458309	603729	769129	954529
78	6084	31684	77248	142884	228484	334084	459684	605284	770884	956484
79	6241	32041	77841	143641	229441	335241	461041	606841	772641	958441
80	6400	32400	78400	144400	230400	336400	462400	608400	774400	960400
81	6561	32761	78961	135161	231361	337561	463716	609961	776161	992361
82	6724	33124	79524	145924	232324	338724	465124	611524	777924	964324
83	6889	33489	80089	146689	233289	339889	466489	613089	779689	966289
84	7056	33856	80656	147456	234256	341056	467856	614656	781456	968256
85	7225	34225	81225	148225	235225	342225	469225	616225	783225	970225
86	7396	34596	81796	148996	236196	343396	470596	617796	784996	972196
87	7569	34969	82369	149769	237169	344569	471969	619369	786769	974169
88	7744	35344	82944	150544	238144	345744	473344	620944	788544	976144
89	7921	35721	83521	151321	239121	346921	474721	622521	790321	978121
90	8100	36100	84100	152100	240100	348100	476100	624100	792100	980100
91	8281	36481	84681	152881	241081	349281	477481	625681	793881	982081
92	8464	36864	85264	153664	242064	350464	478864	627264	765664	984064
93	8649	37249	85849	154449	243049	351649	480249	628849	797449	986049
94	8836	37636	86436	155236	244036	352836	481636	630436	799236	988036
95	9025	38025	87025	156025	245025	354025	483025	632025	801025	990025
96	9216	38416	87616	156816	246016	355216	484416	633616	802816	992016
97	9409	38809	88209	157609	247009	356409	485809	635209	804609	994009
98	9604	39204	88804	158404	248004	357604	487204	636804	806404	996004
99	9801	39601	89401	159201	249001	358801	488601	638401	808201	998001
100	10000	40000	90000	160000	250000	360000	490000	640000	810000	1000000

Die Kubikzahlen von 1 bis 1000.

	0	100	200	300	400
1	1	1030301	8120601	27270901	64481201
2	8	1061208	8242408	27543608	64964808
3	27	1092727	8365427	27818127	65450827
4	64	1124864	8489664	28094464	65939225
5	125	1157625	8615125	28372625	66430125
6	216	1191016	8741816	28652616	66923416
7	343	1225043	8869743	28934443	67419143
8	512	1259712	8998912	29218112	67917312
9	729	1295029	9129329	29503629	68417929
10	1000	1331000	9261000	29791000	68921000
11	1331	1367631	9393931	30080231	69426531
12	1728	1404928	9528128	30371328	69934528
13	2197	1442897	9663597	30664297	70444997
14	2744	1481544	9800344	30956144	70957944
15	3375	1520875	9938375	31255875	71473375
16	4096	1560896	10077696	31554496	71991296
17	4913	1601613	10218313	31855013	72511713
18	5832	1643032	10360232	32157432	73034632
19	6859	1685159	10503459	32461759	73560059
20	8000	1728000	10648000	32768000	74088000
21	9261	1771561	10793862	33076161	74618461
22	10648	1815848	10941048	33386248	75151448
23	12167	1860867	11089567	33698267	75686967
24	13824	1906624	11239424	34012224	76225024
25	15625	1953125	11390625	34328125	76765625
26	17576	2000376	11543176	34645976	77308776
27	19683	2048383	11697083	34965783	77854483
28	21952	2097152	11852352	35287552	78402752
29	24389	2146689	12008989	35611289	78953589
30	27000	2197000	12167000	35937000	79507000
31	29791	2248091	12326391	36264691	80062991
32	32768	2299968	12487168	36594368	80621568
33	35937	2352637	12649237	36926037	81182737
34	39304	2406104	12812904	37259704	81746504
35	42875	2460375	12977875	37595375	82312875
36	46656	2515456	13144256	37933056	82881856
37	50653	2571353	13312053	38272753	83453453
38	54872	2628072	13481272	38614472	84027672
39	59319	2685619	13651919	38958219	84604519
40	64000	2744000	13824000	39304000	85184000
41	68921	2803221	13997521	39651821	85766121
42	74088	2863288	14172488	40001688	86350888
43	79507	2924207	14348907	40353607	86938307
44	85184	2985984	14526784	40707584	87528348
45	91125	3048625	14806125	41063625	88121125
46	97336	3312136	14886936	41421736	88716536
47	103823	3176523	15069223	41781923	89314623
48	110592	3241792	15252992	42144192	89915392
49	117649	3307949	15438249	42508549	90518849
50	125000	3375000	15625000	42875000	91125000

Die Kubikzahlen von 1 bis 1000.

	500	600	700	800	900
1	125751501	217081801	344472101	513922401	731432701
2	126506008	218167208	345948408	515849608	733870808
3	127263527	219256227	347428927	517781627	733314327
4	128024064	220348864	348913664	519718464	738763264
5	128787625	221445125	350402625	521860125	741217625
6	129554216	222545016	351895816	523606616	743677416
7	130323843	223648543	353393243	525559743	746142643
8	131096512	224755712	354894912	527514112	748613312
9	131872226	225866529	356400829	529475129	751089429
10	132651000	226981000	357911000	531441000	753571000
11	133432831	228099131	359425431	533411731	756058031
12	134217728	229220928	360944128	535387328	758550528
13	135005697	230346397	362467097	537367797	761048497
14	135796744	251475544	363994344	539353144	763551944
15	136590875	232608375	365525875	541343375	766060875
16	137388096	233744896	367061696	543338496	768575296
17	138188413	234885113	368601813	545338513	771095213
18	138991832	236029032	370146232	547343432	773620632
19	139798359	237176659	371694959	549353259	776151559
20	140608000	238328000	373248000	551368000	778688000
21	141420761	239483061	374805361	553387661	781229961
22	142236648	240641848	376367048	555412248	783777448
23	143055667	241804367	377933067	557441767	786330467
24	143877824	242970624	379503424	559476224	788889024
25	144703125	224140625	381078125	561515625	791453125
26	115531576	245314376	382657176	563559976	794022776
27	146363183	246491883	384240583	565609283	796597983
28	147197952	247671352	385828352	577663552	799178752
29	148035839	248858189	387420489	569722789	801765089
30	148877000	250047000	389017000	571787000	804357000
31	149721291	251239591	390617891	573856191	806954491
32	150568768	252435968	392223168	575930368	809557568
33	151419437	253636137	393832837	578009537	812166237
34	152273304	254840104	395446904	580093704	814780504
35	153130375	256047875	367065375	582182875	817400375
36	153990656	257259456	398688256	584277056	820025856
37	154854153	258474853	400315553	586376253	822656953
38	155720872	259694072	401947272	588480472	825293672
39	156590819	260917119	403583419	590589719	827936019
40	157464000	262114000	405224000	592704000	830584000
41	158340421	263374721	406869021	594823321	833237621
42	159220088	264609288	408518488	596947688	835896888
43	160103007	265847707	410172407	599077107	838561807
44	160989184	267089984	411830784	601211584	841232384
45	161878625	269336136	413493625	603351125	843908625
46	162771336	269586136	415160936	605495736	846590536
47	163667323	270840023	416832723	607645423	849278123
48	164566592	272097792	418508992	609800192	851971392
49	165469149	273359449	420189749	611960049	854670349
50	166375000	274625000	421875000	614125000	857375000

Die Kubikzahlen von 1 bis 1000.

	0	100	200	300	400
51	132651	3442951	15813251	43243551	91733851
52	140608	3511808	16003008	43614208	92345408
53	148877	3581577	16194277	43986977	92959677
54.	157464	3652264	16387064	44361864	93576664
55	166375	3723875	16581375	44738875	94196375
56	175616	3796416	16777216	45118016	94818816
57	175193	3869893	16974593	45499293	95443993
58	195112	3944312	17173512	45882712	96071912
59	205379	4019679	17373979	46268297	96702579
60	216000	4096000	17576000	46656000	97336000
61	226981	4173281	17779581	47045881	97972181
62	238328	4251528	17984728	47437928	98611128
63	250047	4330747	18191447	47832147	99252847
64	262144	4410944	18399744	48228544	99897344
65	274625	4492125	18609625	48627125	100544625
66	287496	1574296	18821096	49027896	101194696
67	300763	4657464	19034163	49430863	101847563
68	314432	4741632	19248832	49836032	102503232
69	328509	4826809	19465109	50243409	103161709
70	313000	4913000	19683000	50653000	103823000
71	357911	5000211	19902511	51064811	104487111
72	373248	5088448	20123648	51478848	105151048
73	389017	5177717	20346417	51895117	105823817
74	405224	5268024	20570824	52313624	106496424
75	421875	5359375	20796875	52734375	107171875
76	438971	5451776	21024576	53357376	107850176
77	456533	5545232	21253933	53582633	108531333
78	474552	5639752	21484952	54010152	109215352
79	493039	5735339	21717639	54439939	109902239
80	512000	5832000	21952000	54872000	110592000
81	531441	5929741	22188041	55306341	111284641
82	551368	6028568	22;25768	55742968	111980168
83	571787	6128487	22665184	56181887	112678587
84	592704	6229504	22906304	56623104	113379904
85	614125	6331625	23149125	57066625	114084125
86	636056	6434856	23393656	57512456	114791256
87	658503	6539203	23639903	57960603	115501303
88	681472	6644672	23887872	58411072	116214272
89	704969	6751269	24137569	58863869	116930169
90	729000	6859000	24389000	59319000	117649000
91	753751	6967871	24642171	59776471	118370771
92	778688	7077888	24897088	60236288	119095488
93	804357	7189057	25153757	60698457	119823157
94	830584	7301384	25412184	61162984	120553784
95	857375	2414875	25672375	616298,5	121287375
96	884736	7529536	25934336	62099136	122023936
97	912673	7645373	26198073	62570773	122763473
98	941192	7762392	26463592	63044792	123505992
99	970299	7880599	26730899	63521199	124251499
100	1000000	8000000	27000000	64000000	125000000

Die Kubikzahlen von 1 bis 1000.

	500	600	700	800	900
51	167284151	275894451	423564751	616295051	860085351
52	168196608	277167808	425259008	618470208	862801408
53	169112377	278445077	426957777	620650477	865523177
54	170031464	279726264	428661064	622835864	868250664
55	170953875	281011375	430368875	625026375	870983875
56	171879616	282300416	432081216	627222016	873722816
57	172808693	283593393	433798093	629422793	876467493
58	173741112	284890312	435519512	631628712	879217912
59	174676879	286191179	437245479	633839779	881974079
60	175616000	287496000	438976000	636056000	884736000
61	176558481	288804781	440711081	638277381	887503681
62	177504328	290117528	442450728	640503928	890277128
63	178453547	291434247	444194947	642735647	893056347
64	179406144	292754944	445943744	644972544	895841344
65	180362125	294079625	447697125	647214625	898632125
66	181321496	295408296	449455096	649461896	901428696
67	182284263	296740963	451217663	651714363	904231063
68	183250432	298077632	452984832	653972032	907039232
69	184220009	299418309	454756609	656234909	909853209
70	185193000	300763000	456533000	658503000	912673000
71	186169411	302111711	458314011	660776311	915498611
72	187149248	303464448	460099648	663054848	918330048
73	188132517	304821217	461889917	665338617	921167317
74	189119224	306182024	463684824	667627624	924010424
75	190109375	307546875	465484375	669921875	926859375
76	191102976	308915776	467288576	672221376	929714176
77	492100033	310288733	469097433	674526133	932574833
78	163100552	311665752	476910952	676836152	935441352
79	194104539	313046839	472729139	679151439	938313739
80	195112000	314432000	474552000	681472000	941192000
81	196122941	315821241	476379541	683797841	944076141
82	197137368	317214568	478211768	686128968	946966168
83	198155287	318611987	480048687	688465387	949862087
84	199176704	320013504	481890304	690807104	952763904
85	200201625	321419125	483736625	693154125	955671625
86	201230056	322828856	485587636	695506456	958585256
87	202262003	324242703	487443403	697864103	961504803
88	203297472	325660672	489303572	700227072	964430272
89	204336469	327082769	491169069	702595369	967361669
90	205379000	328509000	493039000	704969000	970299000
91	206425071	329939371	494913671	707347971	973242271
92	207474688	331373888	496793088	709732288	976191488
93	208527857	332812557	498677257	712121957	979146657
94	209584584	334255384	500566184	714516984	982107784
95	210644875	335702375	502459875	716917375	985074875
96	211708736	337153536	504358336	719323136	988047936
97	212776173	338608873	506261573	721734273	991026973
98	273847192	340068392	508169592	724150792	994011992
99	214921799	341532099	510082399	726572699	997002999
100	216000000	343000000	512000000	729000000	1000000000

Verzeichniß

einiger Druckfehler und Verbesserungen.

Seite	Zeile	muß stehen	anstatt
23	13	1 L. < 3 Ctr.	3 Ctr. < 1 L.
48	21	0,8	0,5
66	6	andere	andern
77	14	(§. 46 u. 52)	(46; 52.)
106	17	aber	oder
150	29	noch unbekannte,	unbekannte, noch
129	20	ist zwischen 0,625 und $\frac{3}{8}$ das Zeichen = zu setzen	
168	22	60^3	.60
195	6	$7+8$	$7-8$
266	12	$\frac{9\cdot 8}{2}$	$\frac{9\cdot 8}{3}$
271	17	andern Zahlen,	andern,

Der Buchbinder muß die zwei Blätter von Seite 89 bis 92 statt der durchschnittenen einschalten.

Tab. I.

Lud. Schmidt sc.

Tab. II.

Tab. IV.

Fig. 84.
Fig. 88.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 99.
Fig. 100.
400 500 600 700 800
4 5 6 7 8

Fig.105.
Fig.111.
Fig.118.
Fig.119.
Fig.126.
q.125.
10.
57"
8'4"
6'

Tab. VI.

Fig. 130.
Fig. 131.
Fig. 134.
Fig. 135.
Fig 136.
Fig. 138.
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 146.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.

Tab. VII.

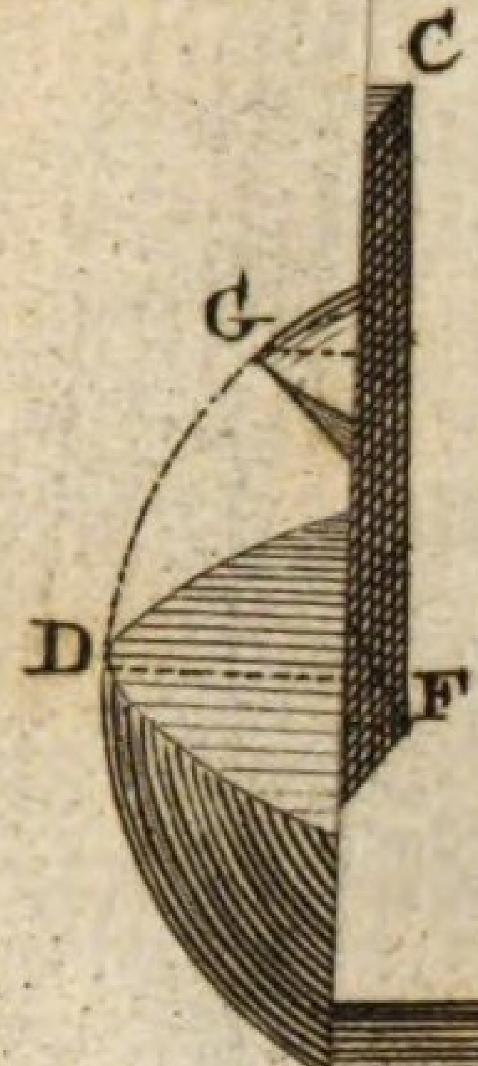


Fig. 159.

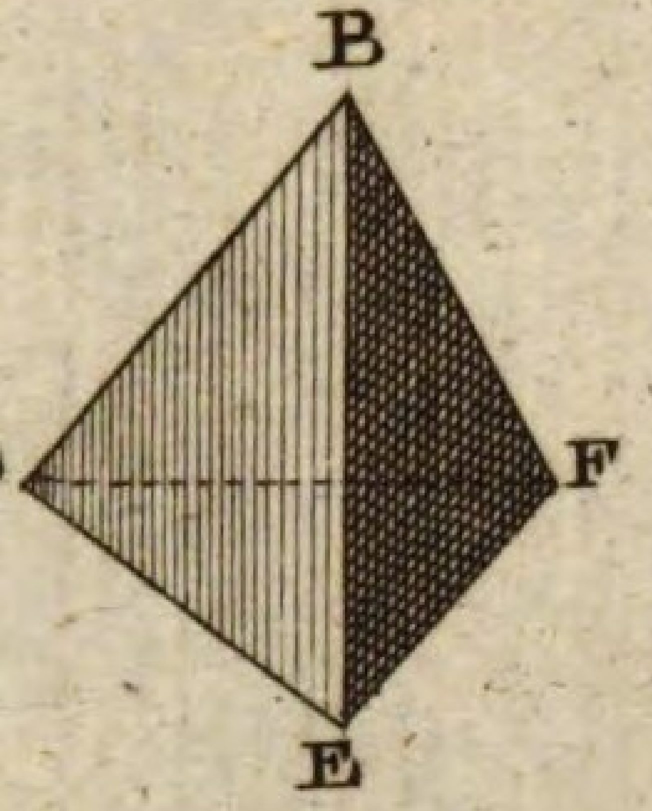
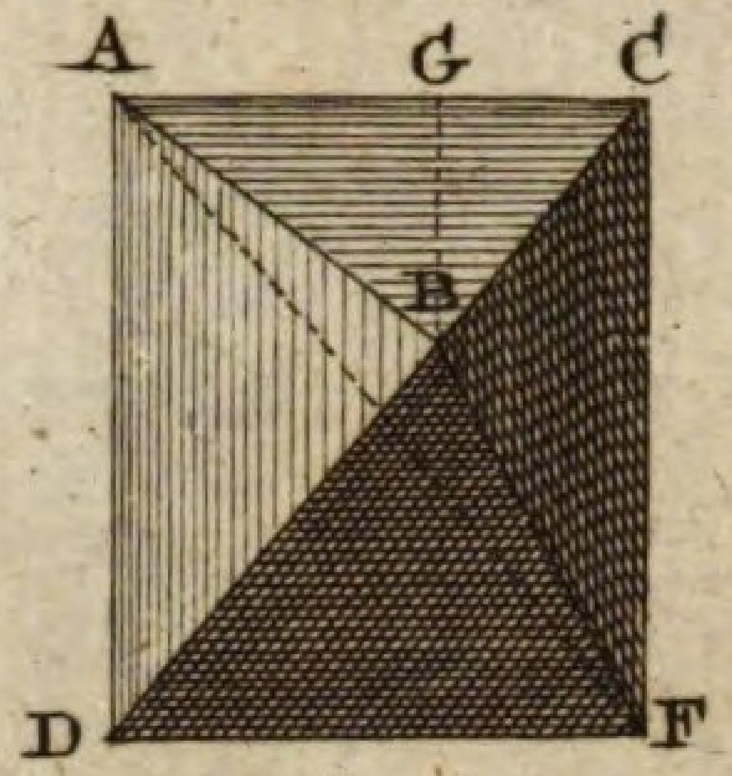
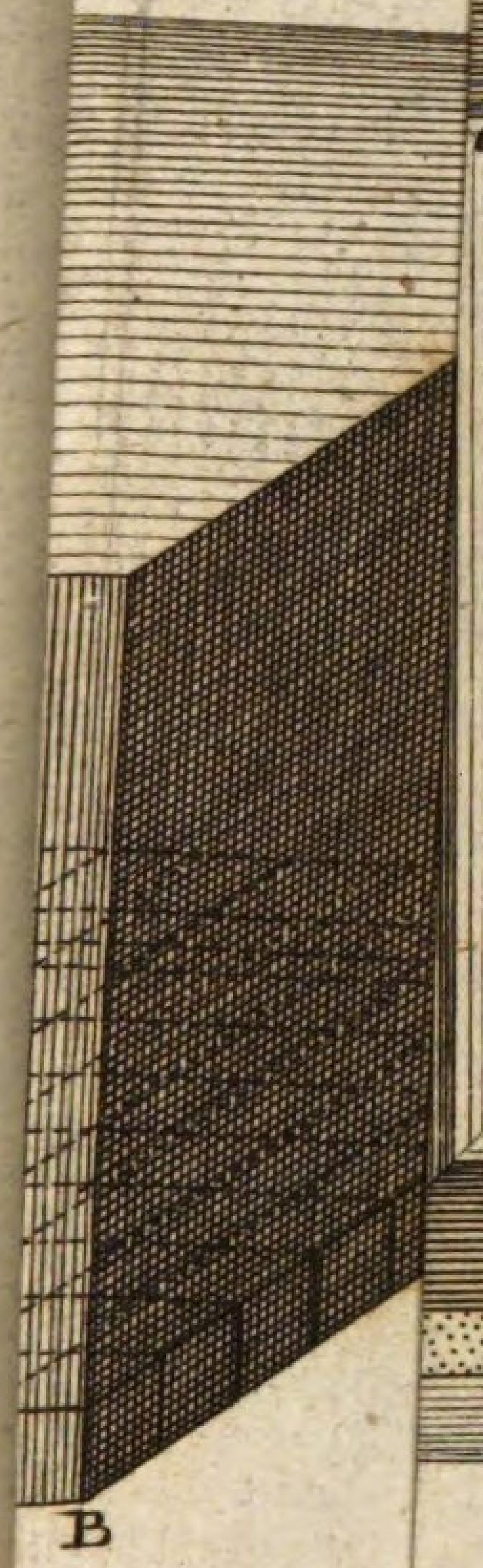


Fig. 160.





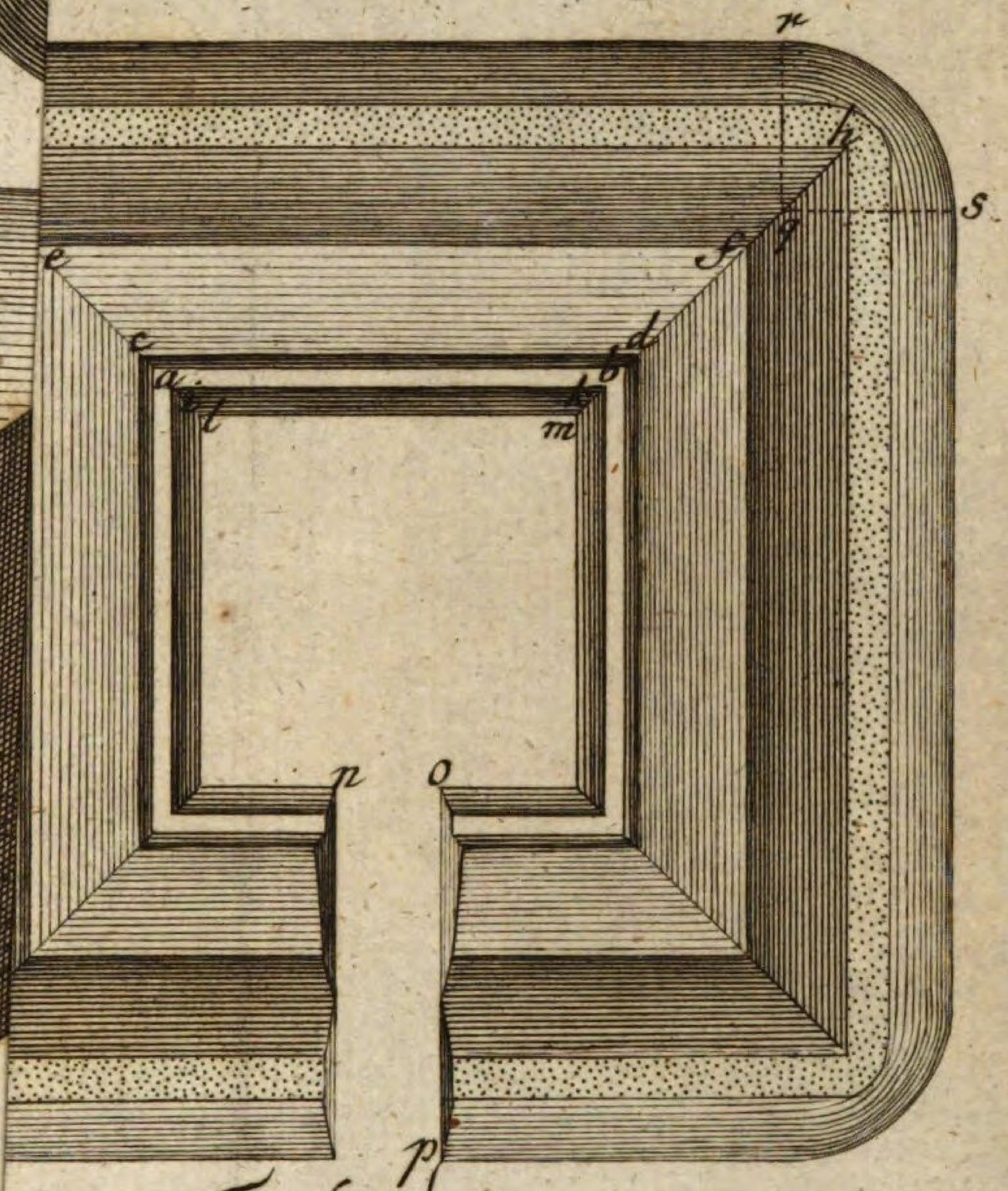
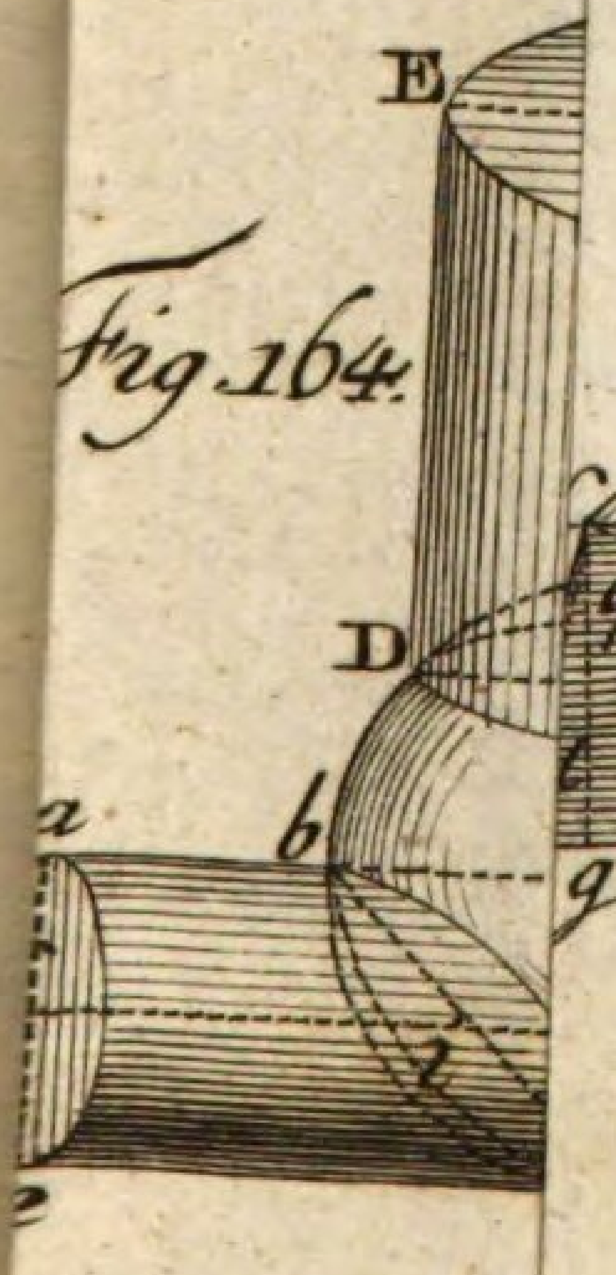
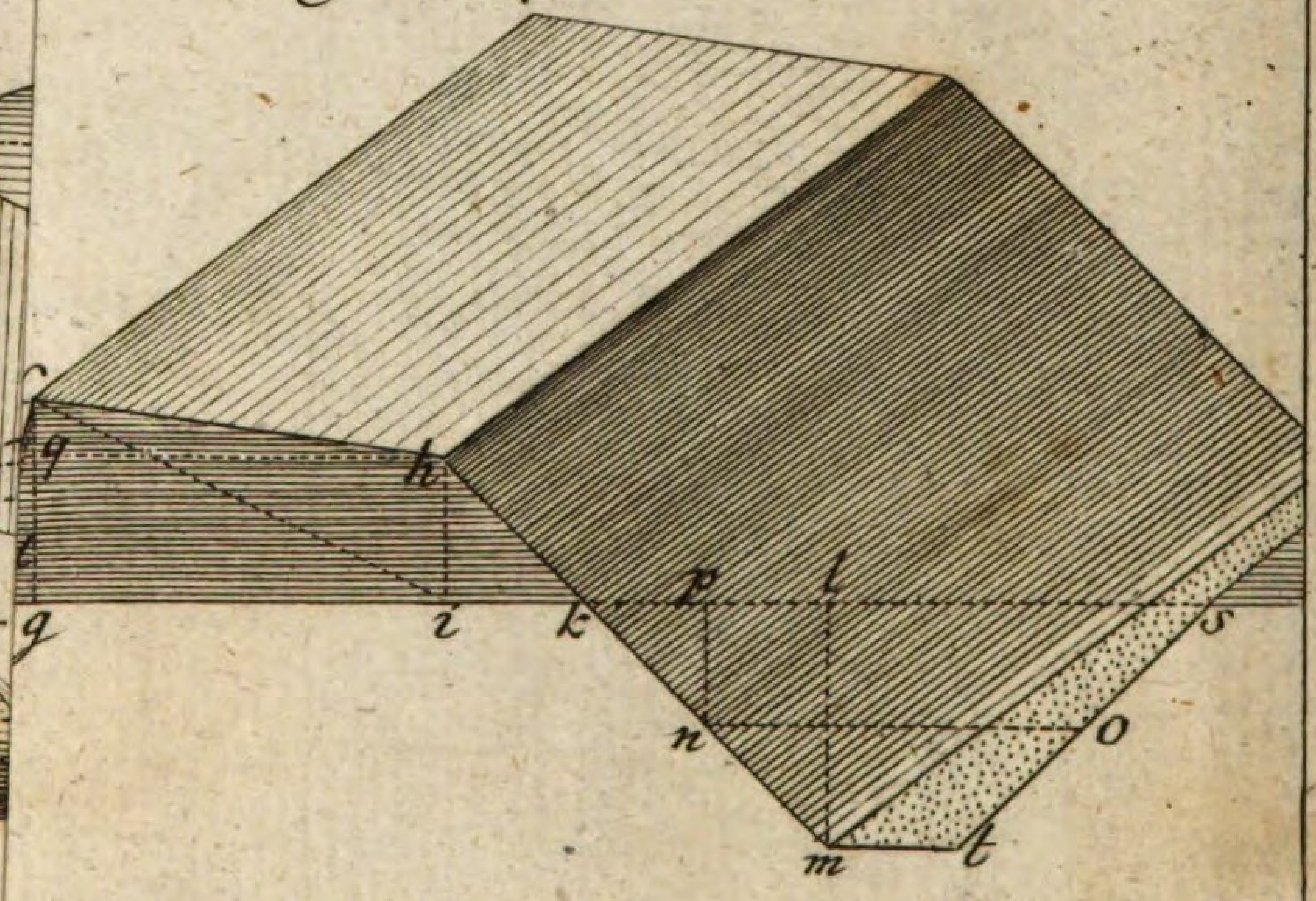


Fig. 168.

Fig. 164.





169.

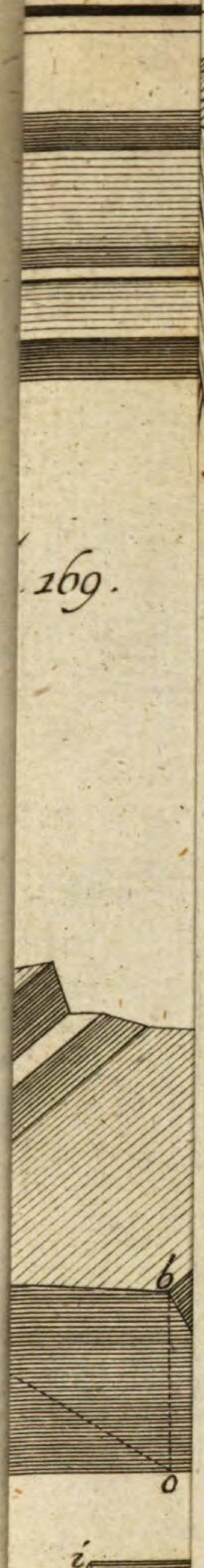
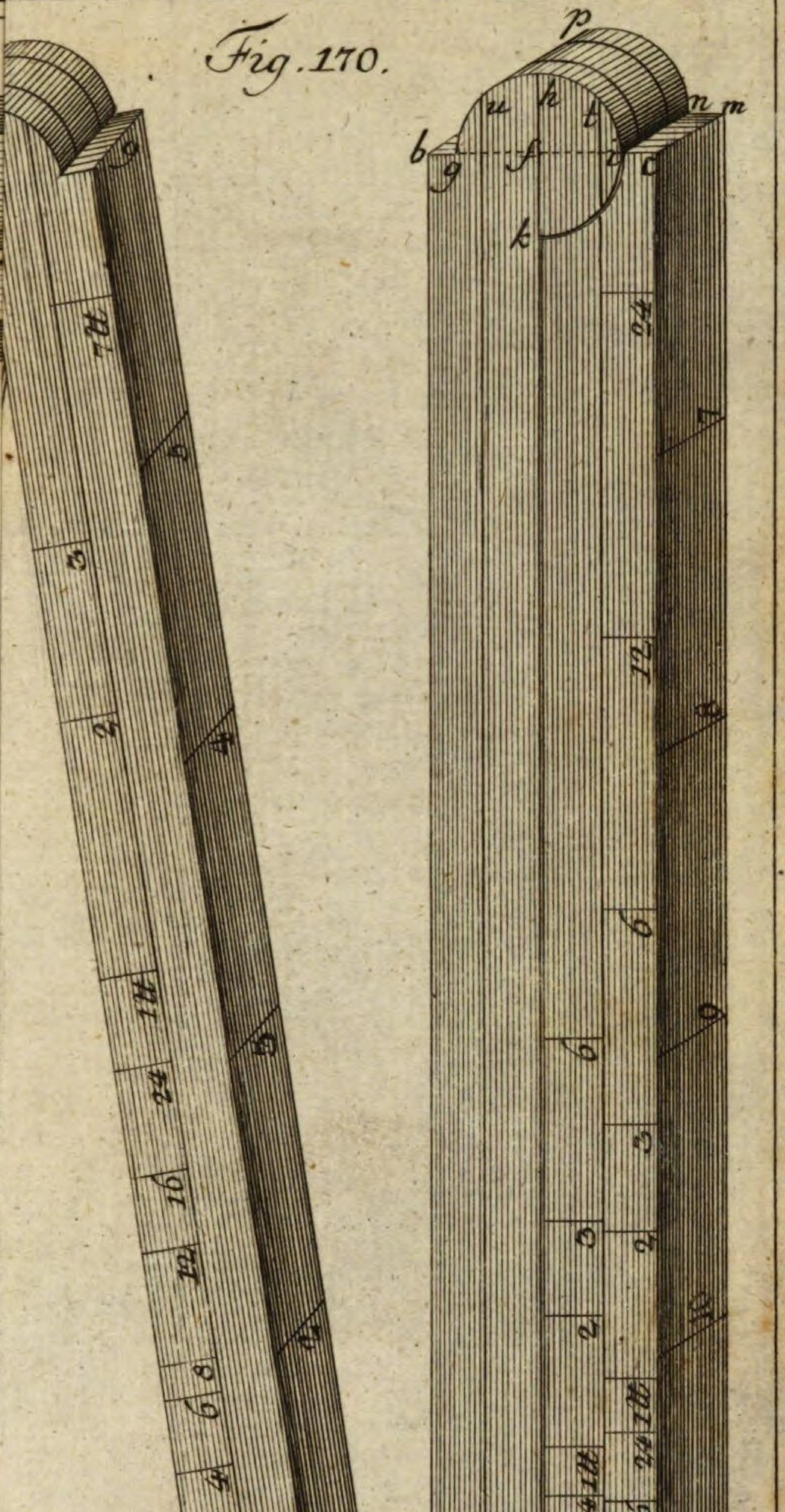
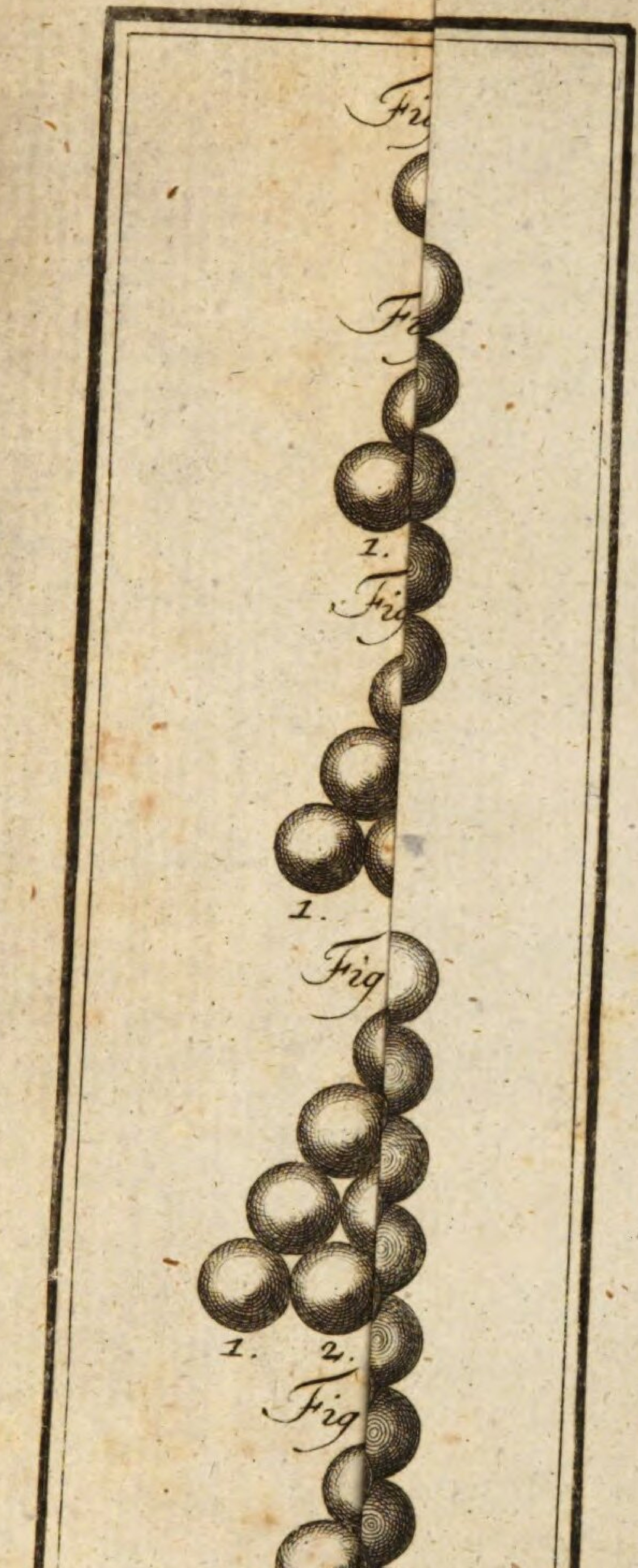

b
o
i
h
e

Fig. 170.


p
u
h
t
n
m
b
g
f
c
k
q
Pulver
Stein
Zoll
Blei 1Lot
Eisen 1Lot
w
a
r
e
s
d
l


1.
Fig
1.
Fig
1.
2.
Fig
1.
2.
Fig
1.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Handbuch der Arithmetik und Geometrie für Offiziere Welche diese Wissenschaften von selbst erlernen wollen

Bd.: 1. [Arithmetik]. - 1789. - XXVIII, 285 S. : 9 Ill.

Berlin 1789

Math.p. 743 g-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083342-0
VD18 80326609-001